을 풀어 λ를 먼저 구할 수도 있다. 이때, λ에 대한 방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$을 특성방정식(characteristic equation), $\det(\lambda I - A)$를 특성다항식(characteristic polynomial)이라 한다.

$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$

연습문제 6.1 행렬의 대각화를 이용하여 다음과 같이 정의되는 Fibonacci 수열의 일반항을 구하여라.

$$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

6.2 대각화 가능성

앞 절에서 보았듯 n차 정사각행렬이 n개의 서로 다른 고유값을 가지면, 그 행렬은 대각화가 가능하다. n차 정사각행렬의 특성다항식은 n차 다항식이므로 일반적으로 n개의 근을 가진다. 그러나 근 가운데 실근이 아닌 근이 있거나, 중근이 있는 경우는 어떻게 될까?

우리는 현재 실수배하는 연산이 정의되어 있는 실벡터공간(real vector space)만을 생각하고 있으므로, 특성다항식이 허근을 가지는 경우를 지금은 다룰 수가 없지만, 복소벡터공간(complex vector space)을 생각하면 거의 똑같은 방법으로 대각화를 생각할 수 있다.

보기 6.2 $\mathbb{R}^2$ 공간에서 회전변환을 나타내는 행렬

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

의 특성방정식은 $\det(\lambda I - R(\theta)) = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1 = 0$이므로, 고유값은 복소수

$$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$$

이고, 각 경우의 고유벡터는

$\theta \neq 0, \pi$인 한, 회전하여 원래 벡터의 실수배가 되는 벡터는 존재할 수가 없다.

$$\mathbf{v}_1 = (i, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, i)$$

이다. 따라서 복소수 범위에서는

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1}$$

로 대각화할 수 있다. ✧

제 6 장

Around Linear Algebra 8 days

고유값과 고유벡터

> Victor Eigen 교수에게는 아들이 둘 있는데, 이름은 Lambda 1, Lambda 2.
>
> —수학 유머 중

6.1 행렬의 대각화

대각성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬을 **대각행렬(diagonal matrix)**이라 하며, 적절한 기저변환을 통하여 주어진 행렬을 대각행렬로 변형하는 것을 **대각화(diagonalization)**라 한다. 행렬 A가 나타내는 선형사상을 L_A라 하자. 행렬 A가 기저 $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$에 대해 대각행렬이 되었다면, 다음 식에서 알 수 있듯 $L_A(\mathbf{v}_i)$는 다른 벡터를 사용하지 않고 $\mathbf{v}_i$만으로 표현된다.

모든 행렬이 대각화 가능했다면 선형대수학이라는 분야는 생기지 않았을지도.

$$
\begin{aligned}
L_A(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 a_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 a_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n a_n \mathbf{v}_n
\end{aligned}
$$