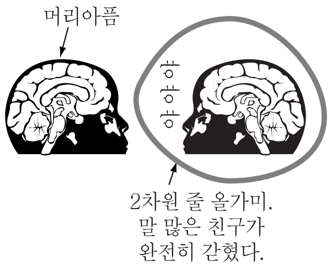

그림 4.151 2차원 밧줄 올가미로 말많은 저자를 완전히 가뒀다.

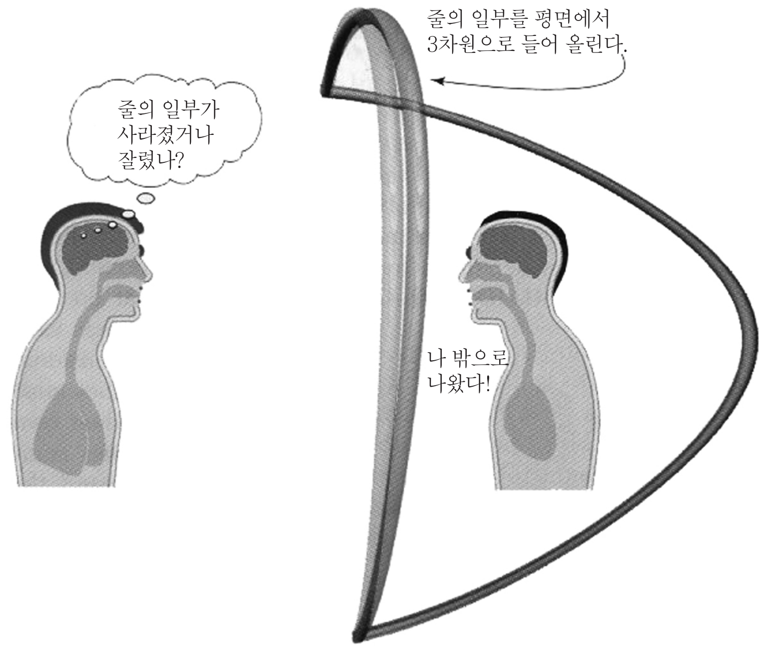

그림 4.152 3차원 안경을 이용해 들려진 밧줄을 정말로 보아라.

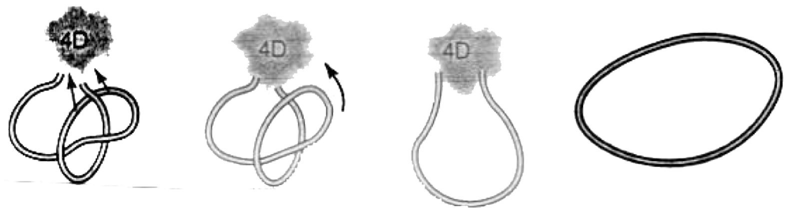

그림 4.155 매듭풀린 밧줄! 잘리지 않았다.

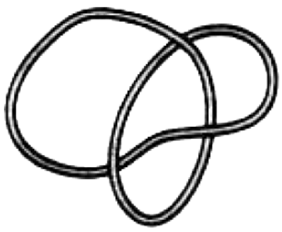

그림 4.153 3차원의 매듭 밧줄 고리

제로 자르지 않고 4차원 공간에서 밧줄의 매듭을 푸는 것을 신기루가 어떻게 도울 수 있는지 설명할 수 있는가?(그림 4.154) 여러분이 보는 것과 실제로 일어나는 일을 시각화하라. 유사에 의해 논의하는 것을 상기하라. 여러분이 다 마치면, 여러분은 매듭이 없는 아직도 봉인된 고리를 잡고 있을 것이다(그림 4.155)[5].

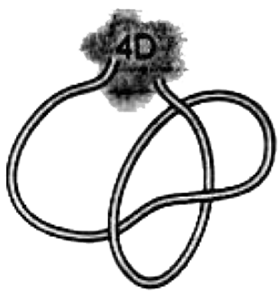

그림 4.154 밧줄을 4차원으로 들어올린다. 잘렸나? 아니다!

4.7.4 정육면체 시각화하기

차원의 개념을 더 설명하기 위해, 이제 4차원 정육면체를 구성하고 시각화함으로써 공간의 기하학을 생각한다. 언제나처럼, 먼저 모든 낮은 차원에서 정육면체를 구성함으로써 활력을 불어넣기로 한다. 이 방법은 전의 차원에서 구성된 정육면체를 이용해 다음 높은 차원에서 정육면체를 연속적으로 구성하도록 허용할 것이다. 우리가 다시 차원성을 순차적으로 조사하고 있음을 주목하라.

0차원 정육면체는 상당히 쉽다. **모든 것**은 단지 한 점인 것을 상기하라. 따라서, 0차원 정육면체는 점이다. 이제 0차원 정육면체에 잉크를 묻히고, 새로운 방향으로 한 단위 끈다. 이 끄는 것은 실제로 1차원 정육면체인 직선 선분을 생성한다. 이 직선 선분에 잉크를 묻혀 전의 것과 수직인 방향으로 한 단위 끈다면 (정사각형으로 알려진) 2차원 정육면체를 얻는다. 만약 2차

5) 그림 4.154의 밧줄은 3차원 관찰 시야에서는 열렸다. 4차원에서 → 고리를 풀고 꼬임을 풀고 내려 놓으면 신기하게도 풀린 밧줄을 보게 된다.

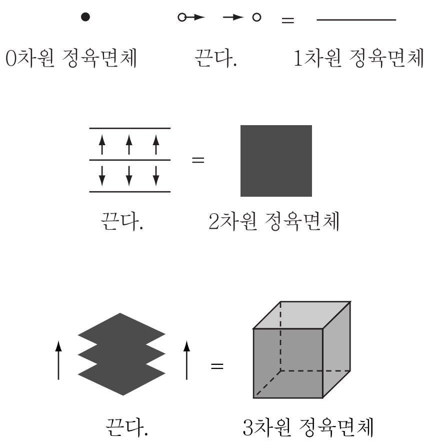

그림 4.156 순차적 정육면체 만들기

원 정육면체 전체에 잉크를 묻혀 앞의 방향과 다른 새로운 방향으로 한 단위 끈다면, (정육면체로 알려진) 3차원 정육면체를 구성한다(그림 4.156).

마지막 정육면체는 실제로 3차원 정육면체의 그림—미술가의 표현—이다. 2차원 종이에서 완전하고 완벽한 3차원 정육면체를 그린다는 것은 불가능하다. 대신에, 3차원 눈이 올바르게 이해하고 설명하는 투시적 그림을 그린다. 예를 들어, 그림 4.157을 생각하고 이것을 투시적 그림이 아닌 순전히 종이 조각 위의 도형으로만 관찰하라. 우리는 실제로 무엇을 보는가?

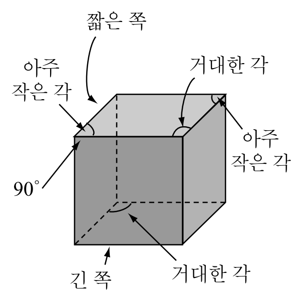

그림 4.157 평면에서의 도형–분명히 대칭이 아니다!

이 그림의 몇 개의 직선은 다른 것보다 길고, 몇 개의 각은 크고, 다른 각들은 매우 작다. 이 성질은 3차원 정육면체의 성질이 분명히 아니다. 3차원 정육면체에서는 모든 모서리는 같은 길이를 가졌고, 모든 각은 완전한 직각이다. 따라서, 그림이 왜 이렇게 우습게 보이는가? 다시, 이것은 투시그림의 미술가의 표현일 뿐이다. 우리는 3차원 물체를 본능적으로 보고 이해하는 피조물이기 때문에 조정을 하고, 그림을 알맞은 방법으로 설명한다. 비록 모든 각이 그런 방법으로 그려지지 않고 모든 모서리가 같게 그려지지 않았더라도 우리는 모든 각을 직각으로 보고, 모든 모서리를 같은 것으로 본다. 우리의 마음은 눈이 실제로 보는 것에 자동적으로 적응한다.

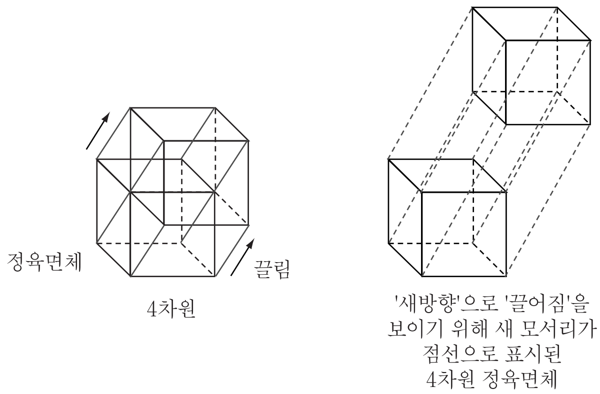

그림 4.158 4차원 정육면체 만들기(왼쪽), 4차원 정육면체(오른쪽)

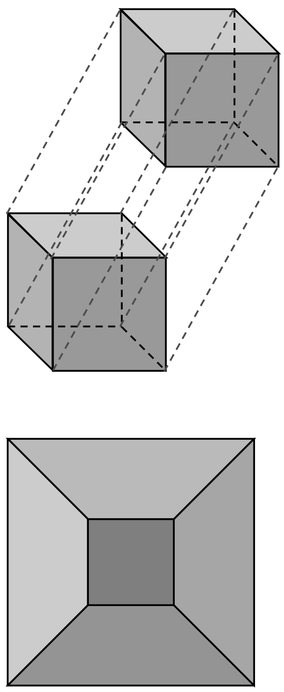

그림 4.159 3차원 정육면체를 "위"에서 본 그림

이제 여러분은 4차원 정육면체를 구성하고 그것의 그림을 그리는 과정을 서술할 수 있는가? 다시, 언제나처럼, 유사에 의해 진행한다. 3차원 정육면체(이것은 입체임을 주목하라)를 취하여 잉크를 묻히자. 단지 이것의 면만 잉크를 묻히는 것이 아니라, 내부의 점까지도, 정육면체의 점이라면 모두 묻힌다. 고형의 3차원 정육면체를 정육면체형의 스폰지로 생각하는 것이 도움이 된다. 이런 방법으로 고형의 정육면체의 모든 점의 내부에 잉크가 있도록 시각화할 수 있을 것이다. 이제 앞서의 방향에 수직인 방향으로 한 단위 끌면, 4차원 정육면체를 갖는다. 3차원 정육면체를 앞서의 것과는 다른 방향으로 움직이고 있으므로, 3차원 정육면체는 이것이 끌리고 있는 동안 결코 그 자신을 만나지는 않는다. 물론, 이 끌기는 전적으로 우리의 상상에서 이루어진다. **초정육면체**로 알려진 4차원 정육면체의 하나의 관점이 그림 4.158[6]에 보여진다.

6) 그림 4.158에서 점선은 "새로운" 방향으로의 "끌림"을 보이기 위해 보여준 새로운 모서리를 그린 것이다

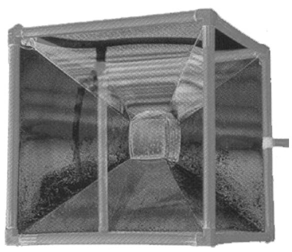

그림 4.160 비누막에 의해 만들어진 3차원에서의 4차원 정육면체

그림은 복잡하게 보이고 실제로 그렇다. 이것은 4차원 물체의 2차원 그림이다. 종이에 맞추기 위해 그 물체를 2차원 내려뜨렸다. 그림은 많은 서로 다른 각과 길이를 포함하고, 직각으로 만들어진 정육면체가 아닌 것처럼 나타난다. 그러나, 기억하라. 이것은 투시적으로 그려졌다. 4차원에서는, 이 정육면체는 완전하다. 모든 모서리는 같은 길이를 갖고, 모든 각은 정확히 직각이다. 어려움은 우리가 4차원을 지각할 수 있는 눈을 갖지 못했고, 따라서 3차원 정육면체에서 했던 것과 같이 투시법을 자동적으로 쓸 수 없다는 것이다. 더 좋은 그림은 4차원 정육면체의 3차원 그림이 된다(그림 4.159). 3차원 정육면체의 또 다른 2차원 그림과, 비누막에 의해 만들어진 3차원에서의 4차원 정육면체의 유사 투시법을 보자(그림 4.160). 4차원 정육면체에 대해 이것의 기하학적 모양에 대해 더 좋은 감각을 얻으려면 마음 속에 3차원 그림을 생성하려고 노력해야만 한다.

이제 5차원 정육면체까지도 그릴 수 있다. 어떻게? 이것만 기억하라. 생활이 그대를 지치게 하면 그저 잉크를 묻혀 끌어라! 4차원 정육면체의 모든 점에 다 잉크를 묻혀 앞서의 방향에 수직인 방향으로 한 단위 끌어라. 자 보라, 5차원 정육면체를 갖게 됐다(그림 4.161)[7]. 이 연속적인 추리를 이용해 4보다 큰 차원의 기하학적 구조를 생각한다. 신중한 분석을 통해, 마음 속에서, 눈으로 볼 수 없는 세계의 기하학적 통찰을 볼 수 있다.

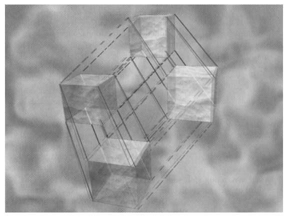

그림 4.161 5차원 정육면체

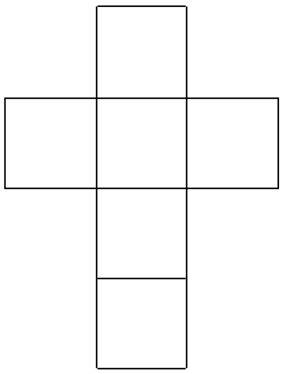

그림 4.162 펼쳐진 3차원 정육면체. 이제 모든 면이 완전한 정사각형이다.

7) 그림 4.161에서는 단지 4차원 정육면체를 새로운 방향으로 끌었다. 점선이 새로 더해진 것이다. 3차원 안경을 이용해 5차원의 사고를 얻어라.

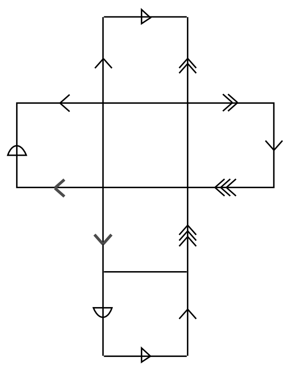

그림 4.163 모서리를 어떻게 함께 붙이는가를 표시한 펼쳐진 3차원 정육면체

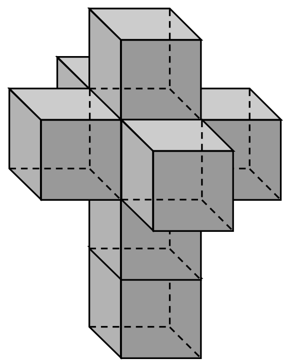

그림 4.164 3차원에서 펼쳐진 4차원

이 정육면체를 마감하기 전에, 종이 위에 3차원 정육면체의 투시적 그림을 그리는 문제와 완전한 3차원 정육면체를 그릴 수 없는 문제로 되돌아간다. 진실은 모든 모서리가 정확히 같은 크기이고 모든 각이 완벽하게 직각이 되는 방법으로 종이 위에 3차원 정육면체를 그릴 수 있다는 것이다. 이것은 3차원 정육면체를 그리기 위해서는 3차원 전부를 필요로 하기 때문에 불가능한 것처럼 보인다. 비밀은 정육면체를 펼치는 것이다. 따라서, 이것을 그림 4.162처럼 그릴 수 있다.

이것을 어떻게 조립하는지 이해해야만 한다. 모서리를 따라 접고 밖의 모서리들을 올바른 방법으로 함께 붙인다. 여기 펼쳐진 3차원 정육면체에 대해 서로 붙여야 하는 모서리의 쌍을 표시하였다(그림 4.163).

이 구성은 3차원 공간에서 모든 모서리가 같은 길이를 갖고, 모든 각이 직각이 되는 방법으로 4차원 정육면체를 펼치는 것이 가능하다는 것을 보여주는 것 같다. 우리가 해야 할 것은 면의 쌍을 함께 결합하고 붙이는 것이다. 실제로, 그림 4.164에 3차원 공간에서 펼쳐진 4차원 정육면체가 주어졌다. 이것을 조립하기 위해서는 밖의 면들은 짝을 이루어 붙여야만 한다.[8]

4.7.5 4차원의 존재성

마지막으로, 질문으로 이 절을 마감한다. 4차원이 존재하는가? 4차원이 존재한다는 것은 무슨 뜻하는가? 현실적인 관점에서, 고차원 공간은 분명히 존재하고, 예를 들어, 큰 사업과 고단위 회계에서, 자주 이용된다. 이 사실을 질문에 답함으로써 보인다. 나는 돈을 벌기 위해 4차원을 어떻게 이용하는가? 여러 가지 네트워용 케이블을 생산하는 사업을 한다고 가정하고, 이 사업을 통해 많은 이익을 남기고자 한다고 가정하자. 어떤 결정을 해야만 하는가? 여기 몇 가지 간단한 것이 있다.

- **어디에 우리 공장을 세우는가?**

8) 이 펼쳐진 4차원 정육면체는 살바도르 달리의 1954년 작품 「고난」(The Crucifixion, Corpus Hypercubicus)(그림 4.165)에 대한 영감이었는데 이 그림에서 달리는 종교적 암시가 4차원에 있다고 생각했다.

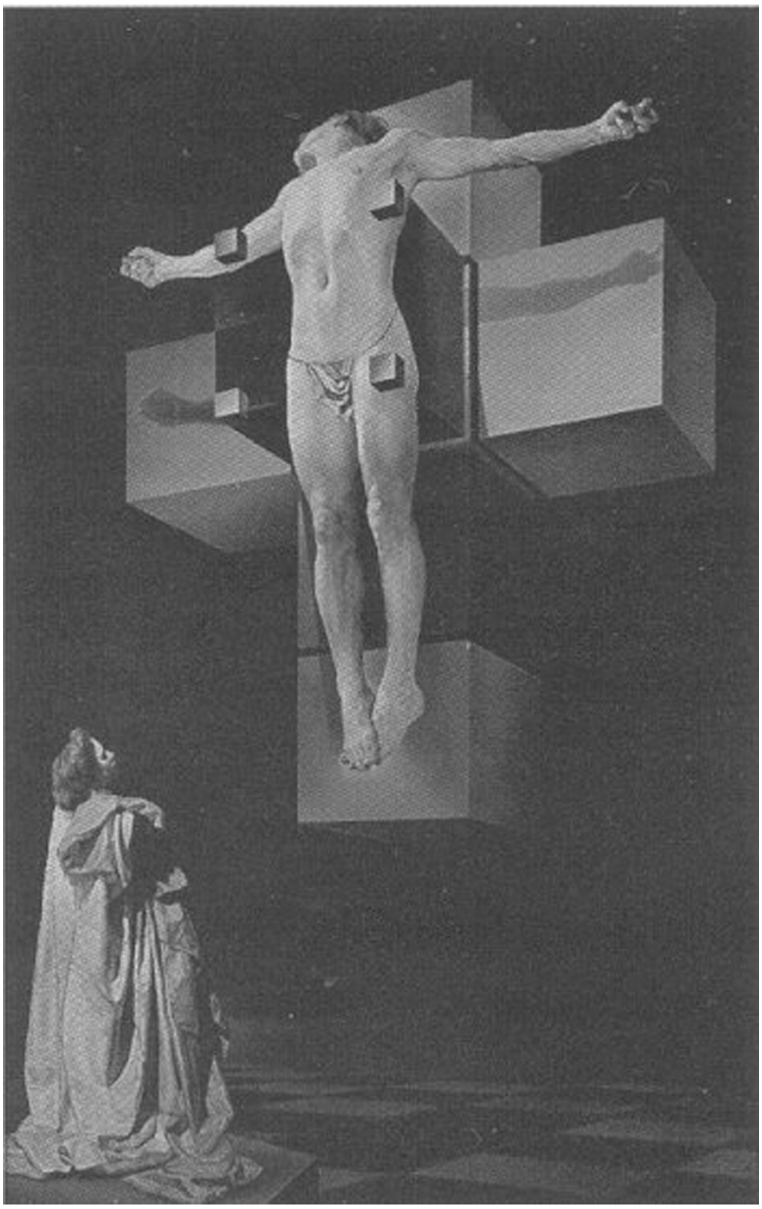

그림 4.165 달리의 작품

아무것도 없는 사막 한 가운데 공장이 있다면, 임대료는 싸지만, 운송비가 많아진다. 공장이 대도시에 있다면, 임대료는 비싸지만 운송비는 거의 안든다.

- **공장이 얼마나 커야 하는가?**
  공장이 크면 클수록 케이블을 더 빨리 더 많이 생산할 수 있지만 임대료는 비싸진다.

- **사원을 몇명이나 채용해야 하는가?**
  조금 채용한다면, 생산성이 떨어지고, 백만 명을 채용한다면, 공장에 겨우 끼어 들어가 움직일 수가 없고 따라서 아무것도 생산할 수 없게 된다.

- **자본금을 얼마나 많이 빌려야 하는가?**
  빚을 지면 세금혜택을 받고 손에 자본금도 또한 쥘 수 있지만, 어마어마한 빚을 지면, 대출금을 갚느라고 도산할 지도 모른다.

이 계획이 너무 간략화되었긴 하지만, 이미 4 단계의 자유 또는 네 가지의 서로 다른 변수가 있다. 전반적인 이익을 최대화하는 각각에 대한 단계를 찾을 때까지 이 네 가지의 변수를 교묘하게 다루어야만 한다. 이 문제는 4차원에 놓여 있다. 커다란 사업의 세계에서조차 고차원은 존재한다.

많은 사람이 시간은 아마도 4차원일 것이라고 믿는다. 비록 시간이 차원처럼 행동할 지라도 다른 차원에서처럼 운동의 자유를 즐기지 못한다. 예를 들어, 시간을 거슬러 올라가는 것은 불가능하다. 실제로, 어떤 물체(속성)라도 공간의 모형에서 차원을 나타내는데 사용될 수 있다. 예를 들어, 소리, 색, 또는 온도를 차원으로 사용할 수 있다. 즉, 6차원 공간의 유일한 점을 나타내기 위해서는 여러분에게 3차원의 점(세 좌표)을 주고, 가락(C 올림표), 색(보라)과 온도(5°C)를 말해 줄 수 있다. 이 물체(속성)들은 6차원의 점을 정확히 서술한다. 4차원에 대한 논의는 공간적이었고, 모든 4차원은 똑같은 기하학적 상태를 갖는다.

좋다. 그러나 4차원이 물리적으로 존재하는가? 분명히 4차원은 물리적으로 존재할 수 있지만, 3차원을 볼 수 없는 2차원 사람과 꼭 같이, 그 가외의 자유의 방향을 볼 수가 없을 것이다. 아마도 우리는 4차원 우주의 단지 한 조각 위에 살고 있을지도 모를 일이다. 실제로, 현대 과학의 이론은 3차원을 넘는 많은 물리적 차원을 넘는 것으로 우주를 서술한다. 그러나, 지금 시점에서 그것들을 정확하게 인지할 수는 없다. 그렇지만, 이미 4차원이 마음 속에 존재함을 보았다. 이것을 묘사하고, 그 내부를 여행하고, 이것을 즐길 수 있다. 4차원은 지각세계를 모두 넘는 미적 감상력으로 마음의 세계에서 우리가 탐험하고 관찰할 수 있는 실제 세계이다.

더 진행해서, 우리의 수학 여행의 다음 정거장을 가기 전에 마지막으로 한 가지 질문을 한다. 공간이 휘는 것을 허용한다면 어떤 일이 일어날까?

돌아보기. 4차원 공간은 이미 알고 있는 1, 2, 3차원 공간들에 의해 생성된 형태를 따라 마음 속에서 구성하는 세계이다. 4차원 피조물은 책상 위에서 종이를 끼우는 클립을 집어 들수 있는 것처럼 쉽게 3차원의 봉인 금고로부터 이 내용을 골라낼 수 있다. 4차원의 귀중품을 에워싸기 위해서는 초정육면체—정육면체의 4차원 유사—가 필요하다. 2 또는 3차원 "그림"을 살펴보거나 또는 초정육면체 같은 물체를 펼침으로써 4차원 공간을 시각화할 수 있다.

우리는 익숙한 것을 살펴보고 경향과 유사를 찾음으로써 4차원에 대한 생각을 발전시켰다. 여기서 전개된 4차원은 모호한 이상한 나라도, 각각의 개체에 대해 잘못 정의되지도, 특이하지도 않다. 이것은 특정한 모양과 명확한 형태를 갖췄다. 다음으로 높은 차원을 생성하기 위해 더 낮은 차원의 공간을 쓸고 가는 경향을 따랐다. 알려진 공간 중의 이 형태는 우리의 이해를 확인하기에는 더 이상 사용가능한 물리적 모형이 없을 때조차 우리가 이 형태를 따를 수 있는 충분히 분명한 것이었다.

직관의 감각으로는 감지될 수 없는 사고에 마음을 여는 한 가지 방법은 유사를 이용하는 것이다. 익숙한 물체나 사고로부터 시작하여, 형태를 찾을

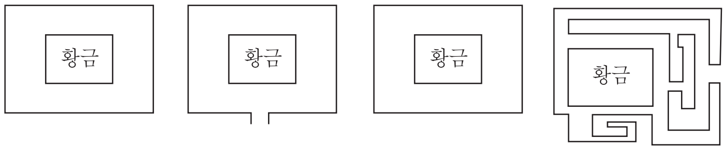

그림 4.166 문제 I.1의 그림

수 있고, 이 형태를 새로운 사고를 생성하기 위해 확장할 수 있다. 우리는 자신에게 물어볼 수 있다. 이 형태가 확장되었다면, 목록의 다음 개체는 어떤 성질을 가질까? 그 다음 개체를 서술한 후에는 다음 개체가 물리적으로 실제로 구성될 수 있던지 아니던지 우리는 새로운 사고를 창조했다. 유사에 의한 추론은 새로운 사고를 창조하는 강력한 방법이다.

마음의 풍경

I. 생각 굳히기

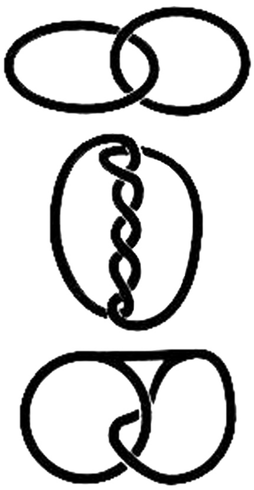

그림 4.167 문제 I.2(1)의 그림

1. (1) 그림 4.166에서 2차원 평면에서 개체를 휘거나 옮김으로써 여러 가지 방벽으로부터 황금 막대를 어떻게 제거할 수 있는지 서술하라. 어떤 저장소가 막대를 제거하기 위해서 찢겨야만 하는가?

   (2) 황금을 제거하기 위해 찢는 것이 필요한 그림 4.166에 대해, 3차원을 이용함으로써 이것의 저장소를 찢지 않고 황금을 어떻게 제거할 수 있는지 서술하라.

2. (1) 4차원을 이용해, 그림 4.167의 개체들의 짝을 어떻게 풀 수 있는지 서술하라.

   (2) 4차원을 이용해, 그림 4.168의 매듭을 어떻게 풀 수 있는지 서술하라.

3. 정육면체, 4차원 정육면체, 5차원 정육면체와 6차원 정육면체의 그림을 생성하라.

4. 병렬처리 컴퓨터는 정육면체의 각각의 꼭지점에 연산처리 장치를 놓음으로써 4, 5차원과 더 고차원의 정육면체를 사용한다. 하나의 처리장치는 정보를 모서리에서 이것에 연결된 처리장치로 보낸다. 두 꼭지점 사이의 거리는 꼭지점 중의 하나에서 다른 것으로 가는 길을 형성하기 위해 필요한 모서리의 최소수로 정의된다. 3차원 정육면체의 꼭지점 사이의 가장 긴 거리는 무엇인가? 4차원 정육면체에서는? 5차원 정육면체에서는? 일반적으로, n차원 정육면체에서는?

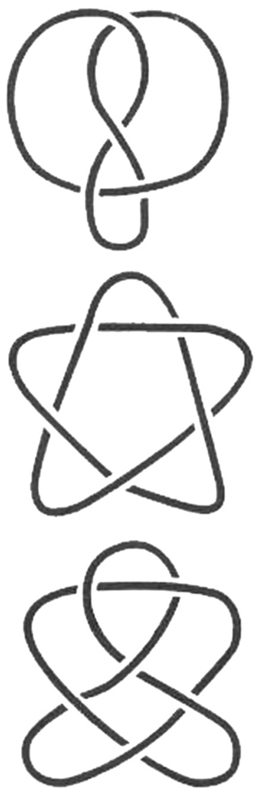

그림 4.168 문제 I.2(2)의 그림

II. 새로운 사고 창조하기

1. 우리는 모든 차원에서 정육면체를 어떻게 구성하는지를 보았다. 삼각형은 어떤가? 0차원 삼각형은 단지 점이다. 1차원 삼각형은 직선 선분이다. 당신은 2차원 삼각형이 어떻게 생겼는지 알고 있다. 3차원 삼각형은 정사면체이다. 경향이 어떠한가? 방금 생성한 삼각형을 택하고 삼각형 "위"의 다음 차원에 새로운 점을 더한다. 삼각형의 꼭지점에서 새로운 점으로 새로운 모서리를 긋는다면, 다음 더 높은 차원의 삼각형을 얻는다. 4차원 삼각형을 그리고 다음에 5차원 삼각형을 그려라. 표 4.6을 채워라.

삼각형의 차원	꼭지점의 수	모서리의 수	2차원 면의 수	3차원 면의 수
1				
2				
3				
4				
5				
n(일반적으로)				

표 4.6 문제 II.1의 표

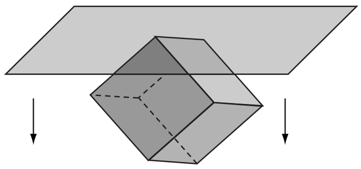

그림 4.172 문제 II.4의 그림. 평면을 아래로 옮기면서 정육면체를 자른다.

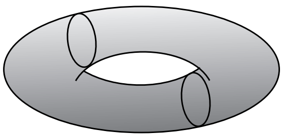

그림 4.169 문제 II.2의 그림1

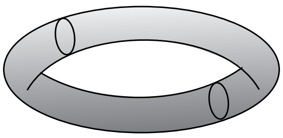

그림 4.170 문제 II.2의 그림2

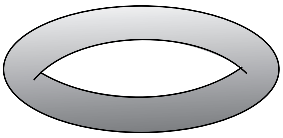

그림 4.171 문제 II.2의 그림3

2. 4차원에서 신비한 개체를 가졌다고 가정하자. 3차원 편조각으로 개체를 반으로 자른다면, 속빈 도넛의 곡면을 보게 된다(그림 4.169).

   그 첫 번째 편조각 바로 위나 아래에 3차원 편조각을 택한다면, 다른 도넛의 곡면을 보게 되는데 이번에는 더 가늘다(그림 4.170).

   더 높게 (그리고 더 낮게) 얇게 저민다면, 허리가 점점 더 가늘어지는 도넛을 보게되고 결국에는 원만을 본다(그림 4.171).

3. 우리는 4.5절에서 정육면체를 펼치는 것에 대해 토의했고, 함께 붙여서 4-정육면체를 만들 수 있는 기회를 주겠다고 약속했었다. 여기 있다. 펼쳐진 4차원 정육면체의 그림을 8개의 3차원 정육면체로 그려라. 그림에서 4차원의 4-정육면체를 다시 만들기 위해 어느 면들이 함께 붙여졌는지 표시하라.

4. 꼭지점으로 평형을 유지한 3차원 정육면체를 가지고 이것을 그림 4.172의 것에서부터 시작하여 많은 평행 평면으로 가늘게 자르는 것을 상상하라.

5. 평면은 점 주위에서 빙글도는 반직선이다. 3차원 공간은 직선 주위에서 빙글도는 반평면이다(그림 4.173).

   반평면에서 내부에 점을 가진 원을 만든다고 가정하자. 3차원 공간을 만들기 위해 반평면을 빙글 돌리면 원과 점은 3차원 공간에서 개체를 생성한다. 개체를 서술하라. 점만 빙글 돌리고 원은 고정된 채로 놔둔다면 우리는 어떤 쌍의 개체를 생성하는가? (그림 4.174)

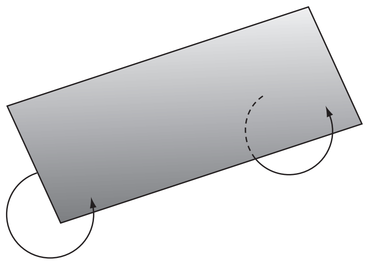

그림 4.173 문제 II.5의 그림 1. 직선 주위를 반평면 빙글 돌아 3차원 공간을 만든다.

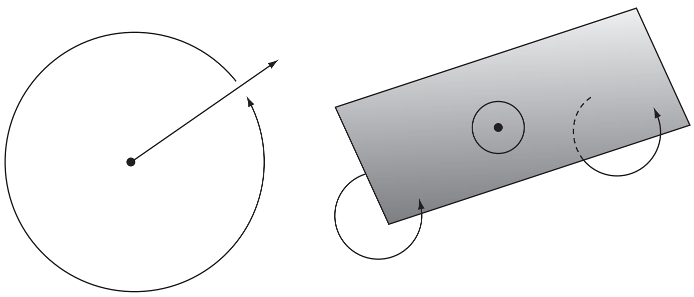

그림 4.174 문제 II.5의 그림 2. 주위를 빙글 돌면 평면을 만든다(왼쪽), 원을 고정하고 점만 돌리면?(오른쪽)

이제 4차원 공간은 무엇인가? 이것은 평면 주위를 빙글 도는 반 3차원 공간이다. 보기(알기) 어려운가? 그렇다. 그러나 노력하라. 반 3차원 공간에서 연결하는 원의 쌍을 택하고 4차원 공간을 만들기 위해 빙글 돌린다면 무엇을 얻는가?(그림 4.175) 점이 내부에 있도록 반 3차원에서 구를 택한다면 어떤가? 구를 움직이지 않은 채로 점 주위로 빙글 돌려라. 원에 연결된 구를 얻는가? 최선의 답을 설명하라.

III. 도전적 사고 형성하기

1. 구는 주어진 점으로부터 고정된 거리에 있는 점들의 집합이다. 1차원 공간에서의 구는 단지 두 점이다. 2차원 공간에서 구를 만들기 위해, 1차원 공간의 구를 두 개 택하여 각각의 것을 채우고(점 사이의 모든 점을 색칠한다), 1차원 공간의 채워진 구의 하나의 밖의 모서리를 다

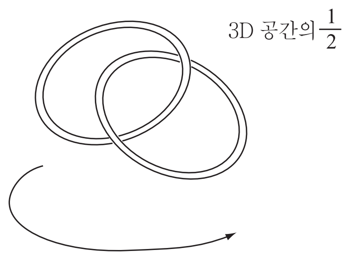

그림 4.175 문제 II.5의 그림 3. 4차원 공간을 만들기 위해 주위를 빙글돈다. 원은 무엇을 만드는가?

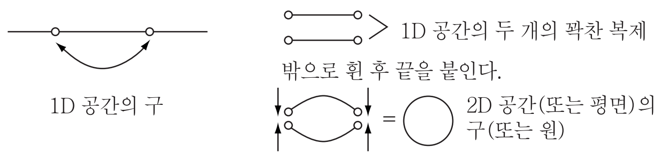

그림 4.176 문제 III.1의 그림

른 것의 밖의 모서리와 붙인다. (이것은 각각의 구를 밖으로 약간 휘는 것을 필요로 한다.) 이 과정은 원(2차원의 구)을 생성한다. (그림을 포함한) 3차원의 구를 생성하기 위해 이 과정을 일반화하고, 이 방법을 이용해 4차원의 구를 어떻게 구성하는지 서술하라(그림 4.176)[9].

9) 그림 4.176는 1차원 공간의 구(왼쪽), 1차원 공간의 구의 두 개의 채워진 복사(오른쪽 위), 약간 휘어 끝을 붙이면 2차원 공간의 구(또는 원)(오른쪽 아래)을 나타낸다.