Problems and Theorems in Inequality

Equations and Inequalities

Part II. Inequalities

조문수 (cho, moon soo) 편저

Version 1.1, 2011년 10월 29일

이 문서는 프리 (free) 입니다.
앞으로 제 2판 또는 그 이후 버전에 대한 변경이 어떻게지는 모르겠지만, 현재 이자료는 자유롭게 재배포하고 수정할 수 있습니다. 이 문서는 LaTeX로 제작 되었으며, 원본 소스는 공개불가임을 알려드립니다.

이 문서는 중, 고등학생 및 교사와 강사들에게 유용하게 쓰이기를 바라는 마음으로 배포합니다. 그러나 아무런 보증도 하지 않습니다. 심지어 상업성이나 특정 목적에 적합하다는 보증도 하지 않습니다.

이 문서는 수학적 자료 및 수학적 지식을 필요로 하는 분들을 위한 공개 문서이므로 책의 내용에 대한 어떠한 책임도 지지 않음을 알려드립니다.

Copyright ©2011 All rights reserved.

감사의 말

이 문서에 사용된 내용 가운데 많은 부분은 다음과 같은 내용을 참조했습니다.

- Titu Andreescu, Bogdan Enescu - Mathematical Olympiad Treasures
- Jiri Herman, Radan Kucera, Jaromir Simsa - Equations and Inequalities
- Titu Andreescu, Răzvan Gelca - Mathematical Olympiad Challenges
- Arthur Engel - Problem Solving Strategies - Dorin Andrica, Zuming Feng, Titu Andreescu - Number Theory
- Edward J.Barbeau, Murray S. Klamkim, William O.J. Moser - Five Hundred Mathematical Challenges
- etc...........(편집요망!!) - and so on...(편집요망!!)

이 책을 쓰면서, KTUG에 글을 올려서 많은 LaTeX전문가들의 자문을 구하였는데 많은 분들이 답변을 보내주셨습니다. 또한 아래에 기록한 분들은 이 책의 교정 및 제안 자료에 더 많은 관심을 보내주셔서 이 글이 더 좋은 글이 되도록 도와주신 분들입니다. 이 글이 현재 모양을 갖추는 데 이들의 도움이 컸습니다. 이 분들 모두에게 진심으로 감사드리고자 합니다. 당연히, 이 책에서 잘못된 부분이 있다면 그것은 순전히 저자의 책임입니다. 제대로 기록된 것이 조금이나마 있다면 그건 틀림없이 아래 있는 분들이 제가 올린 글에 문제점을 해결해 주신 덕분 일 것입니다. 아래의 분들의 Nickname은 KTUG게시판에서 볼 수 있는 분들입니다.

- Progress 님
- gromob 님
- nova de hi 님
- 샘처럼 님
- anonymous 님
- 그 외 많은 분들께 감사 말씀드립니다.

Preface

우리나라 수학교과 과정을 살펴보면 중학교 2학년 때 일차 부등식, 연립일차 부등식을 학습하고, 고등학교 1학년 때 중학교에서 배운 일차 부등식을 기초로 하여 이차부등식 문제를 풀게 되고 절대 부등식 단원에서 산술, 기하, 조화평균의 대소관계를 중심으로 코시-슈발츠 부등식 등 간단한 절대부등식을 다루게 된다. 그리고 고등학교 2학년 인문, 자연계 공통으로 수학 I 에서 지수 및 로그부등식이 나오며 고등학교 2학년 자연계 학생들이 배우는 수학 II에서는 고차부등식과 유리, 무리 부등식을 배우게 된다. 고등학교 과정에서 학생들이 배우는 부등식은 이와 같으며 특히 절대부등식은 산술, 기하, 조화평균과 코시-슈발츠 부등식을 제외하면 간단한 부등식의 중명으로 단원을 마치게 된다. 여러차례 교육과정이 바뀌면서도 부등식 단원은 크게 영향을 받지 않았기 때문에 학생들이나 교사들은 그냥 있는 단원, 방정식을 배우면 그와 관련되어 따라오는 부수적인 단원으로 인식되고 있다.

하지만 중, 고등학교 수학인증시험이나 각종 수학경시대회에 부등식 문제가 자주 출제되고 있으며 고등학교 과정에는 직접적으로 다루지 않지만 재배열부등식이나 곡선의 오목, 볼록을 이용한 젠센 부등식 등 다양한 절대부등식들이 다루어지고 있다. 드물지만 두 개의 변수 혹은 세 개의 변수로 이루어진 다변수 부등식도 수학능력시험이나 고등학교 모의고사 등에서 다루어지고 있다. 그리고 객관식 문제와 단답형 문제위주의 수학능력시험과 학교시험에 맞추어 수학을 공부하다 보니 학생들은 증명문제가 나오거나 개념설명이 조금만 길어져도 집중력을 잃고 수업을 진행할 수 없을 정도로 산만해 지는 경우가 많아 생각하는 시간을 갖고 끈기를 가지고 깊이 사고해야 하는 수학의 본질을 살리는 수업을 할 수가 없다. 그렇다고 해서 계속 다루어지지 않는다면 수학이라는 학문을 하는 의미조차 찾을 수 없을 지도 모른다. 그렇기 때문에 교과서에 나오는 몇 개 안되는 예제 문제만 다루고 나머지 우수한 성적의 몇몇 학생들만 생각해 보도록 하는 방법을 사용하는 수업방식은 많은 문제가 있고, 수업 방법을 개선하기 위한 노력이 필요하다고 생각한다. 다양한 부등식을 증명하고 활용하는 것은 수학의 특성인 활용성과 도구성을 발현하는데 큰 역할을 할 것이기 때문이다.

이 자료는 고등학교 교과과정에서 다루는 부등식을 중심으로 같은 부등식을 대학교에서 배우는 것과 고등학교에서 배우는 것이 어떻게 다른지 – 고등학교에서는 대학에서 배우는 일반화된 부등식에서 변수를 2개 또는 3개 정도로 줄여서 다루고 있다 – 를 비교해 보고 증명하는 방법을 다양하게 해 봄으로서 학생들의 사고의 폭을 넓게 하고, 교사들도 부등식단원에 대하여 다시 한 번 공부할 수 있는 계기를 마련하고자 했다. 수열단원의 수학적 귀납법에 등장하는 베르누이 부등식, 부등식 단원에 나오는 산술, 기하, 조화평균의 대소관계, 코시-슈발츠 부등식등은 고등학교 교과과정에 많이 다루는 절대부등식이므로 여러가지 증명 방법과 예제를 제시하였다. 그리고 그 외의 절대부등식들 즉, 재배열 부등식, 젠센 부등식, 휠더 부등식등은 교과과정에는 나오지 않지만 문제의 한 조건이나 보기로 나와 문제풀이를 할 때 간접적으로 사용되므로 참고 할 수 있도록 몇 가지를 다루었다. 그리고 수학자의 이름이 붙은 부등식의 경우 그 수학자에 관한 간단한 설명을 붙임으로서 수업을 이끌어 가는 교사가 활용할 수 있게 하고자 했다. 또한 부등식의 증명과 더불어 부등식을 활용한 다양한

문제를 통하여 결과만을 외워서 문제에 사용하는 것 이외에 주어진 부등식을 논리적으로 체계적으로 증명할 수 있는 시간을 마련하고자 했다.

차 례

표 차례

그림 차례

제 1 장

들어가기

부등식은 수학의 여러 분야에서 필수적인 도구이다. 부등식의 여러가지 해석으로 얻을 수 있는 수의 정렬(Orderings of numbers)은 다양한 이론 및 실질적인 분야에서 그 응용을 확인할 수 있다. 그러므로 학교 과정에서는 절대부등식을 포함한 부등식과 선형 (linear) 부등식 및 2차 부등식에 대하여 많은 관심을 가져야 한다.

1.1 Definition of Notations

우선 부등식에 대한 여러가지 정리와 예제등을 공부하기에 앞서 이 책에서 사용하는 수학적 기호를 먼저 정리하도록 하자.

기호의 정리는 앞으로 배우게 될 매우 복접한 수학적 기호에 대한 혼동을 피하고자 마련하였으므로, 각 기호에 대한 정확한 표현과 이해를 하길 바란다.

표 1.1: Definition of Notations

▪ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum a_k$ ▪ $\displaystyle a+b+c = \sum_{cyc} a$ ▪ $\displaystyle a^2b+b^2c+c^2a = \sum_{cyc} a^2b$ ▪ $\displaystyle a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 = \sum_{sym} a^2b$	▪ $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod a_k$ ▪ $\displaystyle ab+bc+ca = \sum_{cyc} ab$ ▪ $\displaystyle ab+ba = \sum_{sym} ab$ ▪ $\displaystyle \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c} = \sum_{sym} \frac{a^2}{b}$
▪ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ ▪ $\displaystyle (a+b)^n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$	▪ $\displaystyle \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
▪ $\mathbb{R}$: The set of real numbers ▪ $\mathbb{R}^+$: The set of positive real numbers ▪ $\mathbb{R}^{0+}$: The set of non-negative real numbers ▪ $\mathbb{R}^-$: The set of negative real numbers	▪ $\mathbb{Q}$: The set of rational numbers ▪ $\mathbb{Z}$: The set of integers ▪ $\mathbb{N}$: The set of natural numbers

제 2 장

부등식의 기본정리

여러분들은 이미 저학년(초등, 중등) 때 $1, 2, 3, \cdots$ 와 같은 자연수에 대하여 생각할 때, 어떤 수가 다른 어떤 수보다 크다 혹은 작다 는 것을 알고 있다. 이것은 명백히 우리가 첫 번째 수에 다른 수를 더하거나 빼는 방법을 배우기 전에 이미 알고 있었던 내용일 것이고, 나중에 a 는 b 보다 크다는 것은 두 수의 차 $a-b$ 의 부호에 따라서 그 크기의 대소에 대하여 정확히 알게 된다. 이제 우리는 $1, 2, 3, \cdots$ 와 같은 수들의 모임을 원래 수(자연수)에 대하여 반대가 되는 수들(음의 자연수)로 확대하여 인식의 확장을 확장시키고자 한다. 따라서 이 장에서는 정수를 0 과 양수 및 음수로 나누어지는 것에 기초하여 부등식의 필수 이론을 구축하고자 한다.

2.1 부호에 따른 실수의 분류

Definition 2.1.1. 0 이 아닌 모든 실수는 양수(positive) 또는 음수(negative)로 나눌수 있으므로 모든 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 은 다음과 같은 세 집합으로 나누어진다. :[1)]

$$\text{양의 실수집합}\,(=\mathbb{R}^+), \qquad \{0\}, \qquad \text{음이 실수집합}\,(=\mathbb{R}^-)$$

이 세 집합($\mathbb{R}^+$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^-$)으로 나누어진 실수들에 대하여 다음과 같은 규칙들로서 산술적 연산(Arithmetic Operation)[2)]을 하기로 한다.

① $a,\ b \in \mathbb{R} \implies a+b \in \mathbb{R}$,

② $a,\ b \in \mathbb{R} \implies ab \in \mathbb{R}$,

③ $a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}^- \implies ab \in \mathbb{R}^-$,

④ $a \in \mathbb{R}^- \iff (-a) \in \mathbb{R}^+, \quad a \in \mathbb{R}^+ \iff (-a) \in \mathbb{R}^-$, (단, $a \neq 0$)

⑤ $a \in \mathbb{R}^+ \iff \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}^-, \quad a \in \mathbb{R}^+ \iff \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}^-$,

1) 실수 $x \notin \mathbb{R}^-$ 일 때, x 를 음이 아닌 실수라 하고, $\mathbb{R}^{0+}(\mathbb{R}^{0+} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$로 나타내자.
2) 산술적 연산이라함은 사칙연산과 더불어 지수법칙연산을 말한다.

⑥ $a \in \mathbb{R} \iff 0 \times a = \{0\}$,

⑦ $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{R}^{0+} \implies a_1 + a_2 + \ \cdots\ + a_n = \sum a_i \in \mathbb{R}^{0+}$
이 때, $\sum a_i = 0$ 인 것과 $a_1 = a_2 = \ \cdots\ = a_n = 0$ 은 서로 동치이다.

Definition 2.1.2. $a - b$ 가 양수이면 a 가 b 보다 크다고 하고 기호로 $a > b$ 로 나타내며, 마찬가지로 $a - b$ 가 음수이면 a 는b 보다 작다고 하고 기호로 $a < b$ 로 나타낸다. 즉,

$$\begin{aligned} a > b &\iff (a-b) \in \mathbb{R}^{+}, \\ a < b &\iff (a-b) \in \mathbb{R}^{-}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2 부등식의 여러가지 성질

Theorem 2.2.1. 부등식의 기본적인 여러 성질은 다음과 같다.

(1) 이행성 *(Transivility)*

- $\boldsymbol{a > b,\ b > c \implies a > c}$,
- $\boldsymbol{a_1 \geq a_2,\ a_2 \geq a_3,\ \cdots,\ a_{n-1} \geq a_n \implies a_1 \geq a_n}$.

Proof. $a > b,\ b > c$ 이므로 $(a-b) \in \mathbb{R}^{+},\ (b-c) \in \mathbb{R}^{+}$ 이다. 따라서 $(a-b)+(b-c) = a-c \in \mathbb{R}^{+}$ 이므로 $a > c$ 이다. 또한 이것을 확장한 것으로 $a_1 - a_n = (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ \cdots\ +(a_{n-1}-a_n) \in \mathbb{R}^{0+}$ 이므로 $a_1 - a_n \in \mathbb{R}^{0+}$ 이므로 $a_1 \geq a_n$ 임을 쉽게 알 수 있다. □

(2) 수의 덧셈 *(Adding a number)*

- $\boldsymbol{a > b \implies a + c > b + c}$, $\quad \boldsymbol{a - c > b - c}$,
- $\boldsymbol{a < b \implies a + c < b + c}$, $\quad \boldsymbol{a - c < b - c}$.

Proof. $a > b$ 이므로 임의의 실수 c 에 대하여, $(a \pm b) - (b \pm c) = a - b \in \mathbb{R}^{+}$ 이다.
즉, $a \pm c > b \pm c$ 이다. $a < b$ 일 때도 같은 방법으로 증명된다. □

(3) 부등식의 덧셈 *(Adding a inequalities)*

- $\boldsymbol{a > b,\ c > d \implies a + c > b + d}$,
- $\boldsymbol{a_1 \geq b_1\ a_2 \geq b_2,\ \cdots,\ a_n \geq b_n \implies a_1 + a_2 +\ \cdots; + a_n \geq b_1 + b_2 +\ \cdots\ + b_n}$
(이 때, 등호는 $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \cdots,\ a_n = b_n$ 일 때 성립한다.)

Proof. $a > b,\ c > d$ 이므로 (2) 로부터 $a + c > b + c,\ b + c > b + d$ 이고, (1) 로부터 $a + c > b + d$ 이다. 이것을 확장하면

$$
\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\
&= \underbrace{(a_1 - b_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - b_2)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\geq 0} \geq 0
\end{aligned}
$$

□

(4) 수의 곱 *(Multiplying by a number)*

- $\boldsymbol{a > b,\ c > 0 \implies ac > bc,\quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$,
- $\boldsymbol{a > b,\ c < 0 \implies ac < bc,\quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$.

Proof. $a > b$ 이면 $(a - b) \in \mathbb{R}^+$ 이고, $c > 0$ 인 경우에는 ②에 의하여 $(a - b)c = ac - bc \in \mathbb{R}^+$. 따라서 $ac > bc$ 이다.
$c < 0$ 인 경우는 ③에 의하여 $(a - b)c = ac - bc \in \mathbb{R}^-$ 이므로 $ac < bc$ 이다. 또한, c 대신 $\frac{1}{c}$ 을 대입해도 성립한다는 것을 쉽게 알 수 있다. □

(5) 부등식의 뺄셈 *(Subtracting inequalities)*

- $\boldsymbol{a > b,\ c > d \implies a - d > b - c}$,
- $\boldsymbol{a \geq b,\ c \geq d \implies a - d \geq b - c}$.
  (이 때, 등호는 $a - d = b - c$ 즉, $a = b,\ c = d$ 일 때 성립한다.)

Proof. $c > d$ 이므로 $-d > -c$ 이다. 따라서 $a > b,\ -d > -c$ 이므로 (3) 로부터 $a + (-d) > b + (-c)$ 즉, $a - d > b - c$ 이다. □

(6) 부등식의 곱셈 *(Multiplying inequalities)*

- $\boldsymbol{a > b > 0,\ c > d > 0 \implies ac > bd}$,
- $\boldsymbol{a_1 \geq b_1 > 0,\ a_2 \geq b_2 > 0,\ \cdots,\ a_n \geq b_n > 0 \implies a_1 a_2 \cdots a_n \geq b_1 b_2 \cdots b_n}$
  (이 때, 등호는 $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \cdots,\ a_n = b_n$ 일 때 성립한다.)

Proof. $a > b > 0,\ c > d > 0$ 이므로 (4) 로부터 $ac > bc > bd > 0$ 즉, $ac > bd$ 이다.
이것을 확장하면 $a_1 \geq b_1,\ a_2 \geq b_2$ 이므로 같은 방법으로 $a_1 a_2 \geq b_1 a_2,\ b_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 이므로 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 이다. 이제 $n \geq 3$ 일 때도 같은 방법을 적용하면 $a_1 a_2 a_3 \geq b_1 a_2 a_3,\ b_1 a_2 a_3 \geq b_1 b_2 a_3,\ b_1 b_2 a_3 \geq b_1 b_2 b_3$ 이므로 일반적으로 $a_1 a_2 \cdots a_n \geq a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b_n \geq b_1 b_2 \cdots b_n$.
(이 때, 등호는 $a_1 = a_2,\ a_2 = b_2,\ \cdots\ a_n = b_n$ 일 때 성립한다.) □

(7) 부등식의 나눗셈 *(Dividing inequalities)*

- $\boldsymbol{a > b > 0,\ c > d > 0 \implies \frac{a}{d} > \frac{b}{c}}$,
- $\boldsymbol{a \geq b > 0,\ c \geq d > 0 \implies \frac{a}{d} \geq \frac{b}{c}}$.

  (이 때, 등호는 $a = b,\ c = d$ 일 때 성립한다.) 특히, $a = b = 1$ 일 때, $c \geq d > 0$ 이면 $\frac{1}{d} \geq \frac{1}{c}$ 이다.

Proof. $a > b > 0,\ c > d > 0$ 이므로 (6) 로부터 $ac > bd$ 이고, $cd > 0$ 이므로 (4) 로부터 $\frac{ac}{cd} > \frac{bd}{cd}$ 즉, $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ 이고, 등호가 붙은 경우에도 같은 방법으로 증명이 됨을 쉽게 알 수 있다. □

(8) 지수 *(Exponetiating)*

- $\boldsymbol{a > b > 0 \implies a^m > b^m,\ \sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}}$, $(m \geq 2$ 인 정수$)$
- $\boldsymbol{a > b > 0,\ r > 0 \implies a^r > b^r}$, $\boldsymbol{a > b > 0,\ r < 0 \implies a^r < b^r}$.

Proof. $a > b > 0$ 이므로 (4) 을 반복적으로 적용하면 $m \geq 2$ 인 정수에 대하여, $a^m > b^m$ 이 성립한다는 것은 쉽게 알 수 있다.

이제 $a > b > 0$ 일 때 $m \geq 2$ 인 정수에 대하여, $a^m \leq b^m$ 라고 가정하자. (4) 을 반복적으로 사용하면 $(\sqrt[m]{a})^m \leq \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$ 즉, $a \leq b$ 가 되어 모순이다.[3]

따라서 $a > b > 0$ 이면 $m \geq 2$ 인 정수에 대하여, $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ 이 성립한다.

$r \in \mathbb{Q}^+$ 즉, $r = \frac{m}{n}$ $(m,\ n \in \mathbb{N})$ 이라면 $a^m > b^m$ 으로부터 $\sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{b^m}$ 즉, $a^r > b^r$ 이다.

$r < 0$ 인 경우에는 $-r > 0$ 이므로 (7) 로부터 $a^{-r} > b^{-r}$ 즉, $\frac{1}{a^r} > \frac{1}{b^r}$ 이므로 (7) 로부터 $a^r < b^r$ 이 성립한다.[4] □

(9) 부등식의 지수 *(Exponentiating inequalities)*

- $\boldsymbol{a > b,\ 0 < c < 1 < d \implies c^a < c^b,\ d^a > d^b}$.

Proof. $0 < c < 1 < d,\ r = a - b > 0$ 이라 하자.

(8) 로부터 $c^r < 1^r < d^r$ 이므로 $c^{a-b} < 1,\ d^{a-b} > 1$ 이다. 여기에 c^b 와 d^b 를 곱하면 (4) 로부터 $c^a < c^b$ 이고, $d^a > d^b$ 가 성립한다. □

이상을 종합하면 다음과 같다.

---

3) $(\sqrt[m]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = \mid a \mid = a$ 이다.

4) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ 이다. 이것을 지수법칙이라고 하는데, 뒤에서 (***) 설명할 것이다.

표 2.1: 부등식 성질의 종합

• $a > b,\ b > c \implies a > c$	• $a > b, \implies a \pm c > b \pm c$
• $a > b,\ c > d \implies a + c > b + d$	• $a > b,\ c > 0 \implies ac > bc,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$
• $a > b,\ c < 0 \implies ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$	• $a > b,\ c > d \implies a - d > b - c$
• $a > b > 0,\ c > d > 0 \implies ac > bd,\ \dfrac{a}{d} > \dfrac{b}{c}$	• $a > b > 0 \implies \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
• $a > b > 0,\ r > 0 \implies a^r > b^r$	• $a > b > 0,\ r < 0 \implies a^r < b^r$
• $a > b,\ 0 < c < 1 \implies c^a > c^b$	• $a > b,\ d > 1 \implies d^a > d^b$

제 3 장

Various Method of Proof for The Inequality

3.1 동치 변환

우리는 앞으로 풀게 될 5개의 예제 문제에 대하여 고민을 시작할 것이다. : 어떤 부등식이 명백히 참 (true) 임을 보일 때까지 연속적인 단계를 거쳐 그 부등식을 증명 할 것이다. 그렇게 하기 위해서는 각 단계에서 사용되는 부등식이 동치(equivalent) 가 되어야 하는 것이 매우 중요하다. 앞 장에서 이러한 작업– 동치작업 –을 위하여 부등식의 양쪽에 동일한 표현을 추가하거나 곱하거나 지수꼴로 바꾸는 등과 같은 작업이 포함된다. 또한 우리가 잊지 말아야 할 것이 부등식 양쪽의 대수적 변환 (algebraic transformations) 도 잊지 말아야 한다. 우리가 증명해야 할 원래의 부등식에 도달할 때까지 우리는 연속적으로 동치식의 변환을 이용하거나, 혹은 그 반대방향을 선택할 수도 있을 것이다.

Example 3.1.1. $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$ 을 증명하여라.

Proof.

$$\begin{aligned}
\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!} \;&\Rightarrow\; \left(\sqrt[8]{8!}\right)^{72} < \left(\sqrt[9]{9!}\right)^{72} \\
&\Rightarrow\; (8!)^9 = (8!)\cdot(8!)^8 < (9!)^8 = (9\cdot 8!)^8 = 9^8\cdot(8!)^8 \\
&\Rightarrow\; 8! < 9^8.
\end{aligned}$$

$1 < 9,\ 2 < 9,\ \cdots\ 8 < 9$ 이므로 모두 곱하면 $8! < 8^9$ 이다. □

Example 3.1.2. $a < b < c < d4$ 일 때, 다음 중 가장 큰 수를 찾아라.

$$x = (a+b)(c+d), \quad y = (a+c)(b+d), \quad z = (a+d)(b+c)$$

Solution. $y - x = (s+c)(b+d) - (a+b)(c+d) = (d-a)(c-b) > 0$ 이고, 같은 방법으로하면 $z > y$ 임을 쉽게 알 수 있으므로 가장 큰 수는 z 이다.

Example 3.1.3. $a > 1$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} \\
\iff &\frac{1}{a} < \left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\right)^2 \quad (\because \ a+1 > a-1 > 0\text{이므로} \ \sqrt{a+1} > \sqrt{a-1}) \\
\iff &2a - \frac{1}{a} > 2\sqrt{a^2-1} \quad \left(\because \ 2a > 2 > 1 > \frac{1}{a}\right) \\
\iff &4a^2 - 4 + \frac{1}{a^2} > 4(a^2-1) \\
\iff &\frac{1}{a^2} > 0
\end{aligned}$$

□

Example 3.1.4. $a > b > 0, \ r > s > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$(a^s + b^s)(a^r - b^r) > (a^r + b^r)(^s - b^s).$$

Proof. 양변에 $(a^{s+r} - b^{s+r})$ 을 곱하고 다시 빼면 $a^r b^s - a^s b^r > a^s b^r - a^r b^s$ 즉, $2a^r b^s > 2a^s b^r$ 을 얻는다. 양변을 $2a^s b^s$ 로 나누면 $a^r - s > b^r - s$ 인데, $a > b$ 이고, $r - s > 0$ 이므로 준식은 증명이 되었다. □

Example 3.1.5. $a, \ b, \ r, \ s \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라. (단, $a \neq b$)

$$a^{r+s} + b^{r+s} > a^r b^s + a^s b^r.$$

Proof. $a \neq b$ 라면 $LHS - RHS$[1] $= a^r(a^s - b^s) - b^r(a^s - b^s) = (a^r - b^r)(a^s - b^s)$.
여기서 $a, \ b, \ r \ s \in \mathbb{R}^+$ 으므로 $a > b, \ a < b$ 에 관계없이 $(a^r - b^r)$ 와 $(a^s - b^s)$ 부호가 같으므로 $LHS - RHS > 0$ 이다. 따라서 $a^{r+s} + b^{r+s} > a^r b^s + a^s b^r$ 이 성립한다. □

1) LHS : Left-Hand Side, RHS : Right-Hand Side

3.2 Exercises

Exercise 3.2.1. $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 **Example 1.2.1**을 일반화하여라. 즉,

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

이 성립함을 보여라.

Exercise 3.2.2. 2^{700} 과 5^{300} 중 어느 것이 더 큰 수인가?

Exercise 3.2.3. $\dfrac{10^{1997}+1}{10^{1998}+1}$ 과 $\dfrac{10^{1998}+1}{10^{1999}+1}$ 중 어느 것이 더 큰 수인가?

Exercise 3.2.4. 다음 각 부등식을 증명하여라.

(1) $\sqrt{b} > a + \dfrac{b-a^2}{2a+1}$ $(0 \leq a < \sqrt{b} < a+1)$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} > 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})$ $(a > 0)$.

(3) $\dfrac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}} > \dfrac{c+a}{\sqrt{c^2+b^2}}$ $(0 < b < a, \ \sqrt{ab} < c)$.

(4) $\sqrt[12]{a^7} + \sqrt[12]{b^7} \geq \sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a}\sqrt[3]{b}$ $(a, \ b \in \mathbb{R}^+)$.

(5) $(n!)^2 < k!(2n-k)!$ $(n, \ k \in \mathbb{N}, \ \ n > k)$.

3.3 비가역 변환

이제 우리는 원래 명백한 부등식에서 원하는 부등식을 푸는 해결과정에서 비가역적인 문제를 해결할 것이다. 예를 들어, $L \geq R$ 와 같은 부등식을 $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ and $R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$ 로 분해하여 $k = 1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $L_k \geq R_k$ 임을 증명하는 것으로 원래의 부등식을 증명하는 것이다. 이와 유사한 방법이 앞에서 배운 성질 (6) 부등식의 곱셈이다. 우리는 아제 다음과 같은 8 문제를 생각 해본다.

Example 3.3.1. $a, b \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Proof. $LHS = \dfrac{a+b}{1+a+b} = \dfrac{a}{1+a+b} + \dfrac{b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} = RHS.$ □

Example 3.3.2. 빗변이 c, 다른 두 변의 길이가 a, b 인 직각삼각형에 대하여, 다음 부등식을 증명하여라.

$$k > 2\text{인 모든 정수에 대하여}, \quad a^k + b^k < c^k.$$

Proof. 피타고라스 정리에 의하여, $c^2 = a^2 + b^2$ 이고 양변에 c^{k-2} 을 곱하면 $c^k = a^2c^{k-2} + b^2c^{k-2}$.
$a < c, k > 2$ 이므로 (9) 에 의하여 $a^{k-2} < c^{k-2}$ 이므로 $a^k = a^2a^{k-2} < a^2c^{k-2}$.
같은 방법으로 $b^k = b^2b^{k-2} < b^2c^{k-2}$ 이므로 두 식을 더하면

$$LHS = a^k + b^k < a^2c^{k-2} + b^2c^{k-2} = (a^2+b^2)c^{k-2} = c^2c^{k-2} = c^k = RHS.$$

□

Example 3.3.3. $a > b > 0$ $n \in \mathbb{N}$ 일 때, 다음 두 수 A, B 의 대소를 비교하여라.

$$A = \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}, \quad B = \frac{1+b+b^2+\cdots+b^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}.$$

Solution.

$$\frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}} = 1 + \frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{x}}$$

을 이용하자. $a > b > 0$ 이므로 (9) 에 의하여 $a^{-k} < b^{-k}$ $(1 \leq k \leq n)$ 이므로

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots + \frac{1}{b^n}$$

이므로 $A > B$ 이다.

Example 3.3.4. 모든 실수 x 에 대하여, $x^6 + 2 \geq x^4 + 2x$ 가 성립함을 보여라.

Proof. 문제의 부등식은 $x = 1$ 일 때 등호가 성립한다.
$f(x) = x^6 - x^4 - 2x + 2 = x^4(x^2 - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^5 + x^4 - 2)$ 에서 $Q(x) = x^5 + x^4 - 2$ 라면 $x > 1$ 일 때 $Q(x) \geq 0$ 이고, $x < 1$ 일 때, $Q(x) \leq 0$ 임을 보이는 것으로 충분하다.

$$\begin{aligned} x > 1 &\implies x^5 > 1,\ x^4 > 1 &&\implies x^5 + x^4 > 2, \\ -1 < x < 1 &\implies x^5 < 1,\ x^4 < 1 &&\implies x^5 + x^4 < 2, \\ x \leq -1 &\implies x^4 > 0,\ 1 + x \leq 0 &&\implies Q(x) = x^4(1 + x) - 2 \leq -2. \end{aligned}$$

따라서 문제의 부등식이 증명이 되었다. □

Example 3.3.5. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 이고, $c > a + b$ 라 할 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^3 + b^3 + c^3 > 2(a + b)^2 c.$$

Proof. $f(c) = c^3 + 3abc - 2(a + b)^2 c + a^3 + b^3$ 이라 두고, $x > a + b$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 임을 보이자.

$$f(a + b) = (a + b)^3 + 3ab(a + b) - 2(a + b)^3 + a^3 + b^3 = 0$$

이므로 $f(x)$ 는 $(x - a - b)$ 로 나누어 떨어진다. 따라서

$$f(x) = (x - a - b)\left\{x^2 + (a + b)x - a^2 + ab - b^2\right\}.$$

여기서 $x > a + b$ 이면 $x^2 + (a + b)x - a^2 + ab - b^2 \geq (a + b)^2 + (a + b)^2 - a^2 + ab - b^2 = a^2 + 5ab + b^2 > 0$ 이므로 $x > a + b$ 일 때, $f(x) > 0$ 이다. □

Example 3.3.6. $n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$n(a^{2n+1} + 1) > a + a^2 + \ \cdots \ + a^{2n}.$$

Proof. LHS 는 $a^{2n+1} + 1$ 을 n 개 더한 것에 주목하자. RHS 는 $2n$ 개를 더한 것이므로 RHS 를 n 개의 합으로 나타내면

$$RHS = (a + a^{2n}) + (a^2 + a^{2n-1}) + \ \cdots \ + (a^n + a^{n+1}).$$

이 중 k 번째 항을 r_k 라면, $r_k = a^k + a^{2n+1-k}$ 이다. 따라서 $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 에 대하여

$$(a^{2n+1} + 1) - r_k = (a^{2n+1} + 1 - (a^k + a^{2n+1-k}) = (a^{2n-k+1} - 1)(a^k - 1) > 0.$$

□

Example 3.3.7. $0 < a < 1$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$(1+a)^{1-a} \cdot (1-a)^{1+a} < 1.$$

Proof. $b = \dfrac{1-a}{1+a}$ 라면,

$$(1+a)^{1-a} \cdot (1-a)^{1+a} = (1+a)(1-a)b^a = (1-a^2)b^a < b^a.$$

이다. 여기서 $0 < 1 - a^2 < 1,\ 0 < b < 1$ 이므로 (9) 로부터 $b^a < 1$. □

Example 3.3.8. 임의의 $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\left(a^a \cdot b^b \cdot c^c\right)^2 \geq a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}.$$

Proof. 임의의 $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 $a^a \cdot b^b \geq a^b \cdot b^a$ 즉, $a^{a-b} \geq b^{a-b}$ 임은 $a > b,\ a = b,\ a < b$ 인 경우로 나누어 생각하면 (8) 로부터 쉽게 알 수 있다. 따라서

$$a^a \cdot b^b \geq a^b \cdot b^a, \quad b^b \cdot c^c \geq b^c \cdot c^b, \quad c^c \cdot a^a \geq c^a \cdot a^c$$

에서 세 부등식을 모두 곱하면 문제의 부등식을 얻을 수 있다. □

3.4 Exercises

Exercise 3.4.1. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음을 증명하여라.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

Exercise 3.4.2. $x_1 \le x_2 \le\ \cdots\ \le x_{10}$ 일 때, 다음을 증명하여라.

$$\frac{x_1 + x_2 +\ \cdots\ + x_6}{6} < \frac{x_1 + x_2 +\ \cdots\ + x_{10}}{10}$$

Exercise 3.4.3. $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음을 증명하여라.

$$\frac{(1+a)(1+b)}{2+a+b} < \frac{1+a+b}{2}$$

Exercise 3.4.4. $a,\ b\ c$ 가 삼각형의 세 변의 길이라면, $\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}$ 와 $\dfrac{1}{a+b},\ \dfrac{1}{b+c},\ \dfrac{1}{c+a}$ 도 삼각형의 세 변의 길이가 됨을 보여라.

Exercise 3.4.5. 모든 실수에 대하여, $x^6 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ 임을 보여라.

Exercise 3.4.6. $a \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$ 일 때, 다음을 증명하여라.

$$\frac{1 + a + a^2 +\ \cdots\ + a_n}{a + a^2 + a^3 +\ \cdots\ + a^{n-1}} \ge \frac{n+1}{n-1}$$

Exercise 3.4.7. $k,\ m \in \mathbb{N}$ 일 때, 다음을 증명하여라.

$$\left(m + \frac{3}{2}\right)\left(m + \frac{7}{2}\right)\ \cdots\ \left(m + \frac{4k-1}{2}\right) > \sqrt{\frac{(m+2k)!}{m!}}$$

Exercise 3.4.8. $a,\ b\ c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음을 증명하여라.

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Exercise 3.4.9. $a \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}$ 일 때, 다음을 증명하여라.

$$(1+na)^{n+1} > \{1 + (n+1)a\}^n$$

Exercise 3.4.10. $31^{1}1$ 과 $17^{1}4$ 중 어느 숫자가 더 큰가?

Exercise 3.4.11. $2^{3^{100}}$ 과 $3^{2^{150}}$ 중 어느 숫자가 더 큰가?

Exercise 3.4.12. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 세 개의 부등식 중 적어도 하나는 거짓임을 보여라.

$$a+b<c+d, \quad (a+b)(c+d)<ab+cd, \quad (a+b)cd<ab(c+d)$$

Exercise 3.4.13. $a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r \in \mathbb{R}^+$ 이고, $s \geq a+b+c$ 일 때, 다음 세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 가 삼각형의 세 변이 될 수 있음을 보여라.

$$\alpha = \frac{p+q+a+b}{p+q+s}, \quad \beta = \frac{q+r+b+c}{q+r+s}, \quad \gamma = \frac{r+q+c+a}{r+q+s}$$

3.5 추정 방법

수학에서는 종종 복잡한 표현으로 나타난 수식 Q 의 어떤 값을 추정할 필요가 생기는데, 이럴 때 이것을 더 단순한 표현으로 바꾼 식 L 과 U 을 이용할 수 있다. 즉, $L \le Q \le U$ 와 같이 바꾸어서 L 과 U 의 최대 또는 최소값을 계산함으로써 Q 가 취하는 값의 범위를 추정할 수 있다. 다음의 7개의 예제문제를 풀기 위하여 몇 가지 간단한 방법을 설명한다.

Example 3.5.1. $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}^+$ 일 때,

$$1 < \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} < 2$$

을 증명하여라.

Solution. $0 < R < 4$ 임은 명백하지만, 좀더 세분화된 범위를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R &> \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1, \\ R &< \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2 \end{aligned}$$

이므로 $1 < R < 2$ 이다.

Example 3.5.2. $n > 1$ 일 때,.

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ \cdots \ + \frac{1}{\sqrt{n}} < n$$

이 성립함을 보여라.

Solution. $S(n) > n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}$ 이고, $S(n) < n \cdot 1 = n$ 이므로 $\sqrt{n} < S(n) < n$ 이다.

Example 3.5.3. $n > 1$ 일 때,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \ \cdots \ + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

이 성립함을 보여라.

Proof. n 이 홀수(odd), 짝수(even)의 구별을 피하기 위하여 양변에 2 를 곱하면 다음과 같이 식을 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} LRH &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{2n-3}\right) + \ \cdots \ + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-k}\right) < \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$1 \le k \le n-1$ 에 대하여,

$$\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n-k}=\frac{3n}{2n^2+k(n-k)}<\frac{3n}{2n^2}=\frac{3}{2n}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n-k}\right)<(n-1)\cdot\frac{3}{2n}=\frac{3n-3}{2n}<\frac{3n-2}{2n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}.$$

□

Example 3.5.4. $n,\ k \in \mathbb{N}$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ \cdots\ +\frac{1}{(n+k)!}\le\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+k)!}\right\}$$

Proof. $1 \le j \le k$ 에 대하여,

$$\frac{n}{(n+j)!}\le\frac{n+j-1}{(n+j)!}=\frac{1}{(n+j-1)!}-\frac{1}{(n+j)!}$$

이므로 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 을 대입하여 모두 더하면 문제의 부등식을 얻는다. □

Example 3.5.5. $n \ge 2$ 에 대하여,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ \cdots\ \frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{2\sqrt{2n+1}}$$

임을 보여라.

Proof. $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ 이므로 일반화하면 $k \ge 1$ 에 대하여 $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$ 이므로

$$Q(n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ \cdots\ \frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ \cdots\ \frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)Q(n)}$$

따라서, $(2n+1)Q^2(n)<1$ 이므로 $Q(n)<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 이 성립한다.
또한 $\frac{3}{4}<\frac{2}{3}$ 이므로 일반화하면 $k \ge 2$ 에 대하여 $\frac{2k-1}{2k}>\frac{2k-2}{2k-1}$ 이므로

$$2Q(n)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\ \cdots\ \frac{2n-1}{2n}>\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ \cdots\ \frac{2n-2}{2n-1}=\frac{1}{2nQ(n)}$$

에서 $4nQ^2(n)>1$ 이므로 $Q(n)>\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 이 성립한다. □

3.6 Exercises

Exercise 3.6.1. $n > 2$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$(n-1)\sqrt{2} < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots \sqrt{n} < (n-1)\sqrt{n}.$$

Exercise 3.6.2. $n > 2$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$(n!)^2 > n^n.$$

Exercise 3.6.3. $n > 2$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k} > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$

Exercise 3.6.4. $n \geq 2$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{n(2n+1)} < \frac{3}{8} - \frac{1}{2n}.$$

Exercise 3.6.5. $n \geq 2$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n^2+n)}.$$

Exercise 3.6.6. $n \geq 2$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{n(2n-1)} < \frac{1}{2} - \frac{4n-1}{2(4n^2-1)}.$$

Exercise 3.6.7. $n \geq 1$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$n(2n+1) \leq \frac{1\cdot 3}{1} + \frac{3\cdot 5}{2} + \frac{5\cdot 7}{3} + \cdots + \frac{(2n-1)(2n+1)}{n} < 2n(n+1).$$

Exercise 3.6.8. $n \geq 1$ 인 정수에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13} + \cdots \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

3.7 대칭식과 동차식

우리는 중요한 2개의 부등식에 대한 2개의 중요한 성질을 공부하고자 한다. 그리고 이 성질은 다음 절에서 사용될 것이다.

다음 세 부등식을 보자.

$$a+b+c>abc, \qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}>1, \qquad a+2b+c>\frac{ac}{b}$$

위 부등식 중 첫번째와 두번째는 $a,\ b,\ c$ 의 순서를 바꾸어도 원래 부등식과 같게 된다. 이러한 식을 변수 $a,\ b,\ c$ 에 대한 대칭식(Symmetric)이라고 한다. 그리고 세 번째 부등식은 세 변수 $a,\ b,\ c$ 에 대해서는 대칭이 아니지만, $a,\ c$ 의 두 변수에 대해서는 대칭이다.

변수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 에 대한 대칭식이 주어진 경우에는 변수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 을 임의로 적절한 순서를 고려해도 무방하다. 예를 들면 $x_1 \geq x_2, \geq\ \cdots, \geq x_n$ 아라고 가정해도 된다. 이 가정이 대칭식의 문제를 푸는 시발점이 된다는 것을 기억하도록 하자.

Example 3.7.1. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$(a+b+c)^{100} < 3^{100}\left(a^{100}+b^{100}+c^{100}\right)$$

Proof. 문제의 부등식이 $a,\ b,\ c$ 에 대한 대칭이므로 $a \geq b \geq c$ 라 가정하면 $a+b+c \leq a+a+a=3a$ 이므로

$$(a+b+c)^{100} \leq (3a)^{100} = 3^{100}a^{100} < 3^{100}\left(a^{100}+b^{100}+c^{100}\right).$$

□

이제 다음과 같은 부등식을 생각해보자.

$$a^8+b^8+c^8 \geq \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)a^3b^3c^3$$

위 부등식의 $a,\ b,\ c$ 대신에 $ta,\ tb,\ tc\ \ (t \in \mathbb{R}^+$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} LHS' &= (ta)^8+(tb)^8+(tc)^8 = t^8 \cdot LHS \\ RHS' &= \left(\frac{1}{ta}+\frac{1}{tb}+\frac{1}{tc}\right)(ta)^3(tb)^3(tc)^3 = t^8 \cdot RHS. \end{aligned}$$

이므로 $LHS \geq RHS$ 인 부등식은 $LHS' \geq RHS'$ 인 것과 동치가 된다. 이것을 일반화 시켜보면 $t \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여

$$Q(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n) = Q(tx_1,\ tx_2,\ \cdots\ tx_n) = t^r Q(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n)\ \ (r \in \mathbb{R})$$

일 때, $Q(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n)$ 을 변수 $x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n$ 에 대하여 동차식(Homogeneous)이라 한다.
변수 $x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n$ 에 대한 동차식이 주어진 경우 이를테면, x_n 대신에 $tx_n,\quad (t \in \mathbb{R}^+)$ 을 입력해도 같은 식이 되므로 변수의 값을 단순화(normalization)시킬 수가 있다는 것이 가장 큰 특징이다. 다시말하면 $x_n = 1$ 로 둘수도 있고, $x_1 + x_2 + \ \cdots\ + x_n = 1$ 로 두고 문제를 해석할 수도 있다. 다음의 예제를 보자.

Example 3.7.2. $0 < r < s$ 이고, $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(a^s + b^s)^{\frac{1}{s}} < (a^r + b^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Proof. 이 부등식이 $a,\ b$ 에 대한 동차식이므로 $a^r + b^r = 1$ 로 두자. 만일 $0 < a^r < 1$ 이라면 $\dfrac{s}{r} > 1$ 이므로 (9) 에 의하여 $a^s < (a^r)^{s/r} < a^r$ 이다. 같은 방법으로 $b^s < b^r$ 이므로 $a^s + b^s < a^r + b^r = 1$ 즉, $(a^s + b^s)^{1/s} < 1$ 이다.[2)] □

Example 1.9.2와 비슷한 동차식으로 *Jensen inequality*을 예로 들 수 있다.
$n \geq 2$ 인 양의 정수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 에 대하여

$$\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^s\right)^{1/s} < \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^r\right)^{1/r} \qquad (0 < r < s)$$

이 항상 성립한다.[3)]

이 *Jensen inequality*으로부터 다음의 흥미로운 부등식이 유도가 된다.
$n \geq 2$ 이고, $p,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{R}^+,\ p \neq 1$ 일 때,

$$p > 1\text{일 때},\ \ (a_1 + a_2 + \ \cdots,\ a_n)^p > {a_1}^p + {a_2}^p + \ \cdots\ + {a_n}^p,$$
$$0 < p < 1\text{일 때},\ \ (a_1 + a_2 + \ \cdots,\ a_n)^p < {a_1}^p + {a_2}^p + \ \cdots\ + {a_n}^p.$$

2) 여기서 $a^r + b^r = 1$ 로 둔 것을 기억하자.
3) 이 부등식은 나중에 증명할 기회가 있을 것이다.

3.8 Exercises

Exercise 3.8.1. $a,\ b,\ ,c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Exercise 3.8.2. $a,\ b,\ ,c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(-a+b+c)+(c-a)^2(a-b+c) \geq 0$$

Exercise 3.8.3. **Exercise*.*.***을 이용하여 다음의 부등식을 증명하여라.

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Exercise 3.8.4. $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2(a+3b)(3a+b)}{8(a+b)(a^2+6ab+b^2}$$

(Hint : $b=1,\ t>0$에대하여$a=t^2$ 으로 두자.)

3.9 대수 공식의 이용

우리는 $A^n - B^n$ 와 $(A+B)^n$ 에 대한 공식을 이용하므로서 부등식 문제를 해결하는 방법을 공부하고자 한다. (여기서 사용되는 $n,\ k$ 는 모두 자연수$\mathbb{N}$ 이다.)

아래의 3가지의 예제는 다음의 공식을 이용한다. 자연수 $n \geq 2$ 에 대하여

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots AB^{n-2} + B^{n-1} \tag{3.1}$$

Example 3.9.1. $a,\ b \in \mathbb{R}^+,\quad a \neq b$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^{n+1} + nb^{n+1} > (n+1)ab^n.$$

Proof.

$$\begin{aligned} LHS - RHS &= a(a^n - b^n) - nb^n(a-b) \\ &= a(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ \cdot\ + ab^{n-2} + b^{n-1}) - nb^n(a-b) \\ &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ \cdot\ + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - nb^n). \end{aligned}$$

여기서, $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 에 대하여, $a > b$ 이면 $a^k b^{n-k} > b^n$ 이고, $a < b$ 이면 $a^k b^{n-k} < b^n$ 이므로 $LHS - RHS > 0$ 즉, $LHS > RHS$ 이다. □

Example 3.9.2. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 라 하자. $n \geq 1$ 에 대하여 $a^n,\ b^n,\ c^n$[4]을 세 변으로 하는 삼각형 T_n 이 존재할 때, 모든 T_n 은 합동임을 보여라.

Proof. $a \geq b \geq c > 0$ 이라 하자. WLOG[5], Tn 의 세변에 대하여 $c^n > a^n - b^n$ 이므로

$$c^n > a^n - b^n = (a-n)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ \cdot\ + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

여기서 $a \geq c,\ b \geq c$ 에서 $a^{n-1-k}b^k \geq c^{n-1-k}c^k = c^{n-1},\quad (0 \leq k \leq n-1)$ 이므로 $c^n > (a-b)nc^{n-1}$ 즉, $c > (a-b)n$ 이다. 그런데 $a \geq b$ 에 대하여 이 부등식이 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립해야 하므로 $a = b$ 를 만족해야 한다.[6] □

4) 이것을 삼각부등식 (Triangle Inequality) 이라고 하고, 뒤에서 배우게 될 것이다.
5) Without Loss Of Generality
6) 만일 $a > b$ 라면 $n > \dfrac{a-b}{n}$ 인 경우에 모순이 되기 때문이다.

Example 3.9.3. $a > b > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{n+1}{n}a > \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} > \frac{n+1}{n}a.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} &= \frac{(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\ \cdots\ ab^{n-1}+b^n)}{(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ \cdots\ +ab^{n-2}+b^{n-1})}\\ &= \frac{a^n+a^{n-1}b+\ \cdots\ +ab^{n-1}+b^n}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ \cdots\ +ab^{n-2}+b^{n-1}}\\ &= a+\frac{b^n}{D} = b+\frac{a^n}{D}. \qquad \left(D = a^{n-1}+a^{n-2}b+\ \cdots\ +ab^{n-2}+b^{n-1}\right)\end{aligned}$$

여기서

$$\left(\frac{n+1}{n}a\right) = a+\frac{a}{n}, \quad \left(\frac{n+1}{n}b\right) = b+\frac{b}{n}$$

이므로 $\frac{a}{n} > \frac{b^n}{D},\ \ \frac{b}{n} < \frac{a^n}{D}$, 즉 $aD > nb^n,\ \ bD < na^n$ 임을 보이는 것으로 충분하다. $a > b$ 이므로

$$aD = a^n + a^{n-1}b+\ \cdots\ +a^2b^{n-2}+ab^{n-1} > b^n+b^n+\ \cdots\ +b^n = nb^n$$

이고, 같은 방법으로 $bD < na^n$ 을 쉽게 유도할 수 있다. □

3.10 Exercises

Exercise 3.10.1. $0 < a < 1$ 이고, $n > 1$ 인 자연수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1-a^n}{n} > \frac{1-a^{n+1}}{n+1}.$$

Exercise 3.10.2. $a > b > 0,\ c > 0$ 이고, $n \geq 2$ 인 자연수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\sqrt[n]{a^n + c} - \sqrt[n]{b^n + c} < a - b.$$

Exercise 3.10.3. $a > 1$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{a^1 - a^{-1}} > \frac{2}{a^2 - a^{-2}} > \frac{3}{a^3 - a^{-3}} > \cdots$$

Exercise 3.10.4. $a,\ b > \sqrt{2}$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4 > a^2 + b^2.$$

Exercise 3.10.5. $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 가 $a^3 + b^3 = a - b$ 을 만족하면, $a^2 + b^2 < 1$ 임을 보여라.

Exercise 3.10.6. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

다음의 공식도 부등식 문제를 푸는데 매우 유용하다.
$A > B \geq 0$ 이고, $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ 일 때

$$n(A-B)B^{n-1} < A^n - B^n < n(A-B)A^{n-1}. \tag{3.2}$$

이 공식은 식 (1)로부터 쉽게 유도가 되므로 증명은 생략한다. 따라서

$$nB^{n-1} < A^{n-1} + A^{n-2}B + \ \cdots \ + AB^{n-2} + B^{n-1} < nA^{n-1}. \tag{3.3}$$

이 성립한다.

Example 3.10.1. $0 < a < 1$ 이고, $n \geq 2$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$n + (1+a)^n < na + 2^n$$

Proof. 식 (2)에서 $A = 2,\ B = a+1$ 이라 두면, $1 < 1+a < 2$ 이므로

$$2^n - (1+a)^n > n(1-a)(1+a)^{n-1} > n(1-a)\cdot 1^{n-1}$$

로써 문제의 부등식이 증명이 되었다. □

Example 3.10.2. $k \geq 0,\ \ n,\ k \in \mathbb{N}$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$1^k + 2^k + 3^k + \ \cdots \ + n^k > \frac{1}{k+1}\cdot n^{k+1}$$

Proof. 식 (2)에서 $A = j,\ B = j-1$ 로 두고, $n = k+1$ 이라면 $j \geq 1$ 에 대하여 $j^{k+1} - (j-1)^{k+1} < (k+1)j^k$ 이다. $j = 1,\ ,2,\ \cdots,\ n$ 을 대입하여 모두 더하면

$$\begin{aligned} n^{k+1} &= (1^{k+1} - 0^{k+1})(2^{k+1} - 1^{k+1}) + \ \cdots \ + \left\{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}\right\} \\ &= (k+1)(1^k + 2^k + \ \cdots \ + n^k) \end{aligned}$$

□

Example 3.10.3. *Bernoulli inequality*을 증명하여라. 즉,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (x \geq -1,\ \ n \geq 2)$$

Proof. $x > 0$ 인 경우에는 식 (2)에서 $A = 1+x,\ B = 1$ 로, $-1 \leq x < 0$ 인 경우에는 식 (2)에서 $A = 1,\ B = 1+x$ 로 두면 쉽게 증명이 된다. □

3.11 Exercises

Example 3.11.1. $a > 1,\ n \geq 2$ 일 때, $2(a+1)^n + n2^n > (na+2)2^n$ 이 성립함을 보여라.

Example 3.11.2. $0 < a < 1,\ n \geq 2$ 일 때, $n + (1+a)^n < na^2 + 2^n$ 이 성립함을 보여라.

Example 3.11.3. $0 < a < 1,\ n \geq 2$ 일 때, $(1-a)^n + (2n-1)a^n \geq na^{n-1}$ 이 성립함을 보여라.

Example 3.11.4. 실수 a_i 에 대한 산술평균 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_N$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ \cdots\ + a_N}{n} \quad (1 \leq n \leq N).$$

$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq\ \cdots\ \leq a_N$ 이라면 $n = 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ 에 대하여 $a_1 = a_2 =\ \cdots\ = a_n$ 인 경우를 제외할 때, $(A_n)^n > a_n(A_{n-1})^n - 1$ 이 성립함을 보여라.

Example 3.11.5. 실수 $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 일 때, $n \geq 2$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$a^n + (n-1)b \geq na \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}.$$

Example 3.11.6. 음이 아닌 실수 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_k$ 중 가장 큰 수를 D 라 하자. $n \geq 2$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{{d_1}^n + {d_2}^n + \ \cdots\ + {d_k}^n}{k} \leq \left(\frac{d_1 + d_2 + \ \cdots\ + d_k}{k}\right)^n + \alpha_n \cdot D^n \quad \left(\alpha_n = (n-1)n^{\frac{n}{1-n}}\right).$$

3.12 등비수열의 합을 사용

식 (1) 에서 $A = 1,\ B = q(\neq 1)$ 라면

$$1 + q + q^2 + \ \cdots\ q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} < \frac{1}{1-q} \tag{3.4}$$

을 얻을 수 있는데, 이 식도 부등식 문제를 해결하는데 매우 유용하게 사용된다.

Example 3.12.1. 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ \cdots\ + \frac{1}{(n+k)!} < \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ \cdots\ + \frac{1}{(n+k)!} &\le \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ \cdots\ + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\right\} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

□

3.13 Exercises

Exercise 3.13.1. $n \in \mathbb{N}$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \cdots + \frac{1}{(n+2k)!} \frac{n^2+6n+9}{n^2+6n+8} \cdot \frac{1}{(n+2)!}$$

Exercise 3.13.2. $n \in \mathbb{N}$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3^n \cdot n!} < 1$$

Exercise 3.13.3. $n \in \mathbb{N}$ 이고, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\sqrt[k]{2} - 1) < \sqrt[k]{2a_1{}^k + 2^2 a_2{}^k + \cdots + 2^n a_n{}^k}$$

3.14 $(A+B)^n$ 의 전개식의 이용

$A,\ B$ 에 대한 이항정리는 다음과 같다.

$$(A+B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B^n \tag{3.5}$$

여기서 $A,\ B \in \mathbb{R}^+,\ \ n \geq 2$ 일 때, 식 (1.6) 으로부터

$$(A+B)^n > A^n + B^n$$

을 얻을 수 있다. 이 정리는 $n \geq 2$ 의 지수꼴이 포함된 다양한 부등식을 푸는데 강력한 도구이다.

Example 3.14.1. $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $xyz > 0,\ \ x+y+z > 0$ 이면 $n \geq 2$ 에 대하여 $x^n + y^n + z^n > 0$ 임을 보여라.

Proof. $xyz > 0$ 이므로, 세 수 모두 양수이거나, 하나는 음수 두 개는 양수이어야 한다.
$x = a,\ y = -b,\ z = -c\ \ (a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 라 두자. $x+y+z = a-b-c > 0$ 이므로 $a > b+c$ 이다. 따라서 식 (1.6) 으로부터 $a^n > (b+c)^n > b^n + c^n$ 이 성립한다. 여기서 n 에 홀수이면 $x^n + y^n + z^n = a^n - b^n - c^n > 0$ 이고, n 이 짝수일 때는 $x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n > 0$ 이 명백하다. ☐

Example 3.14.2. $a \in \mathbb{R}$ 일 때, 다음 부등식이 성립하면 보여라.

$$(1+na)^{n+1} > \{1+(n+1)a\}^n$$

Proof. *(1st)* 식 (1.6) 을 적용하면 $a^k\ \ (0 \leq k \leq n)$ 의 계수가 같아야 하므로

$$\binom{n+1}{k}n^k \geq \binom{n}{k}(n+1)^k$$

을 보이는 것으로 충분하다. $k = 0,\ 1$ 일 때는 이 부등식이 성립하는 것은 쉽게 알 수 있다.
$k > 1$ 일 때, 이 부등식을 정리하면 $(n+1)^k - n^k \leq k(n+1)^{k-1}$ 인데, 이것은 식 (1.3) 으로부터 성립함을 알 수 있다.

(2nd) 다른 방법으로는 식 (1.3) 에서 $A = 1+(n+1)a,\ B = 1+na$ 로 두면

$$\begin{aligned}\{1+(n+1)a\}^n - (1+na)^n na\,\{1+(n+1)a\}^{n-1} \\ = \{1+(n+1)a\}^n - (1+a)\,\{1+(n+1)a\}^{n-1}\end{aligned}$$

이므로 $(1+na)^n > (1+a)\,\{1+(n+1)a\}^{n-1}$ 이다. 양변에 $1+na$ 를 곱하면

$$(1+na)^{n+1} > \left\{1+(n+1)a+na^2\right\}\{1+(n+1)a\}^{n-1} > \{1+(n+1)a\}^n$$ [7)]

7) 특히, 이 부등식에서 $a = 1$ 인 경우에 $2 > \sqrt[2]{3} > \sqrt[3]{4} > \cdots > \sqrt[n]{n+1} \cdots$ 이 성립한다는 것을 알 수 있다.

.

□

Example 3.14.3. $n \geq 3$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$(2n+1)^n > (2n)^n + (2n-1)^n.$$

Proof.

$$\begin{aligned}(2n+1)^n - (2n-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2n)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (2n)^{n-k} \\ &= 2\left\{ \binom{n}{1}(2n)^{n-1} + \binom{n}{3}(2n)^{n-3} + \binom{n}{5}(2n)^{n-5} + \cdots \right\} \\ &> 2\binom{n}{1}(2n)^{n-1} = (2n)^n.\end{aligned}$$

□

3.15 Exercises

Exercise 3.15.1. $n \geq 2$ 에 대하여, 양의 정수 $a,\ b,\ c$ 가 $a^n + b^n = c^n$ 을 만족하면 $a,\ b,\ c$ 는 삼각형의 세 변의 길이가 됨을 보여라.

Exercise 3.15.2. $0 < a < 1$ 이고 $n \geq 3$ 일 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(1+a)^n + 2a^{n-1} > 1 + a^{n-1}(2^n + a).$$

3.16 제곱을 이용하는 방법

$x \in \mathbb{R}$ and $x \neq 0$ 일 때, 부등식 $x^2 > 0$ 은 많은 다른 부등식들 중 그 간단성과 동시에 많은 수학분야에서의 응용성 때문에 단연 눈에 띄는 부등식이다.
이것을 이용하여 $LHS \geq RHS$ 와 같은 부등식을

$$LHS - RHS = {Q_1}^2 + {Q_2}^2 + \cdots + {Q_n}^2$$

또는

$$LHS - RHS = s_1{Q_1}^2 + s_2{Q_2}^2 + \cdots + s_n{Q_n}^2$$

(여기서 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ 은 음이 아닌 식)
와 같은 식 $Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_n$ 들을 찾아서 문제의 부등식을 증명하는 것이다. 다음의 예제들은 이러한 표현을 찾는 방법을 제시하고 있는데, 기본적으로 우리가 잘 아는 동치 변형을 이용한다.

$x,\ y \in \mathbb{R}$ 이고, $x \neq y$ 일 때, $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 인 부등식은 $(x-y)^2 \geq 0$ 로 부터 쉽게 유도가 된다.
이것을 일반화 해보자.

Example 3.16.1. $p \in \mathbb{R}$ 일 때, 모든 실수 $x,\ y$ 에 대하여 부등식 $x^2 + y^2 \geq pxy$ 이 성립하기 위한 p 의 값의 범위를 구하여라.

Solution.

$$LHS - RHS = x^2 + y^2 - pxy = \left(x - \frac{py}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4-p^2)y^2.$$

에서 $x = \dfrac{py}{2},\ y \neq 0$ 이라면 $4 - p^2 \geq 0$ 이어야 하므로 구하는 p 의 범위는 $-2 \leq p \leq .2$

Example 3.16.2. $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Proof. 양변에 a^2b^2 을 곱하면
$a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ 이므로 $(a+b)(a^2 - an + b^2) \geq ab(a+b)$ 에서 $(a+b)(a-b)^2 \geq 0.$ □

Example 3.16.3. 임의의 $a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여, $n \geq 2$ 일 때 다음 부등식이 성립하기 위한 n 의 범위를 구하여라.

$${a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2 \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_n$$

Solution.

$$LHS - RHS = \left(a_1 - \frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{n-1}{4}\right){a_n}^2$$

이므로 $1 - \dfrac{n-1}{4} \geq 0$ 즉, $n \leq 5$ 이어야 한다.
따라서 문제의 부등식이 성립하기 위한 n 의 범위는 $2 \leq n \leq 5$.[8)]

Example 3.16.4. 임의의 실수 $x,\ y$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 41 \geq 0$$

Proof. x 에 대한 식으로 정리하면

$$x^2 - 2xy - 12x = (x - y - 6)^2 - (y + 6)^2$$

□

이므로

$$LHS = (x - y - 6)^2 + 5y^2 - 10y + 5 = (x - y - 6)^2 + 5(y - 1)^2 \geq 0.$$

Example 3.16.5. 어떤 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x^3 + y^3 = 2$ 이면 그 $x,\ y$ 에 대하여 $x + y \leq 2$ 가 항상 성립함을 보여라.

Proof. 특수해를 구해보면 $x = y = 1$ 일 때, 문제의 부등식이 성립한다.
일반적인 풀이를 위하여 $x = 1 + u,\ y = 1 + v$ 라 두고 $u + v \leq 0$ 을 유도해보자.
$(1 + u)^3 + (1 + v)^3 = 2$ 로부터

$$2 = (1 + u)^3 + (1 + v)^3 = 2 + 3(u + v) + 3(u^2 + v^2) + u^3 + v^3$$

이므로

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2 + 3) = -3(u^2 + v^2) \leq 0$$

이 되어 $u + v \leq 0$ 임이 쉽게 유도가 된다. □

Example 3.16.6. 실수 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 $A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + BC + CA$ 은 잘 알려진 부등식이다.
이 부등식을 이용하여 다음을 증명하여라.

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z) \qquad (x,\ y,\ z \in \mathbb{R})$$

8) $a_j = 1 \ \ (1 \leq j \leq n - 1)$ 이고, $a_n = 1$ 인 경우를 생각하는 것으로 충분하다.

Proof. $A = x^2,\ B = y^2,\ C = z^2$ 이라면, $x^4 + y^4 + z^4 \geq z^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ 이고 다시 $A = xy,\ B = yz,\ C = zx$ 라면

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xy^2z + yz^2x + zx^2 + y = xyz(x + y + z).$$

□

Example 3.16.7. 양의 실수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$a + b + c \leq \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}$$

Proof.

$$A = \sqrt{\frac{bc}{a}},\ \ B = \sqrt{\frac{ca}{b}},\ \ C = \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

로 두면 쉽게 증명이 된다. □

Example 3.16.8. 양의 실수 $a,\ b,\ c$ 가 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 을 만족할 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$V = \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}$$

Proof.

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2\left(\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}\cdot\frac{ca}{b} + \frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}\right) \\ &= \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 &\geq \frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}\cdot\frac{ca}{b} + \frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b} \\ &= a^+b^+c^2 = 1 \end{aligned}$$

이므로 $V^2 \geq 3$ 이다. 따라서 $V \geq \sqrt{3}$ 이다.[9] □

9) 등호는 $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때 성립한다.

3.17 Exercises

Exercise 3.17.1. (1) ~ (28) 에서 $a,\ b, c \in \mathbb{R}^+$ 이고, $x,\ y \in \mathbb{R}$ 일 때, 각 부등식이 성립함을 보이고, 등호가 성립할 조건을 구하여라.

(1) $2xyz \leq x^2 + y^2z^2$.

(2) $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x-y)^2$.

(3) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

(4) $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(5) $\dfrac{x^2}{1+x^4} \geq \dfrac{1}{2}$.

(6) $x^2(1+y^4) + y^2(1+x^4) \leq (1+x^4)(1+y^4)$.

(7) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$.

(8) $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$.

(9) $2 + x^2(1+y^2) \geq 2x(1+y)$.

(10) $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.

(11) $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b - (2 - \sqrt{2})\sqrt{ab}$.

(12) $2x^2 + 4y^2 + z^2 \geq 4xy + 2xz$.

(13) $2(x^4 + y^4) - 12xy + 10 > 0$.

(14) $2(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \leq 3 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

(15) $a(1+b) + b(1+c) + c(1+a) \geq 6\sqrt{abc}$.

(16) $2(a^2 + b^2) + a + b \geq 2(ab + a\sqrt{b} + b\sqrt{a})$.

(17) $a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 6a^2b^2$.

(18) $4x^2y^2 + (z + x + y)(z + x - y)(z - x + y)(z - x - y) \geq 0$.

(19) $x^4 - x^2 3x + 4 > 0$.

(20) $a^4 + a^3 - 8a^2 + 4a + 4 > 0$.

(21) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \geq xy - xz + 2yz$.

(22) $a + b + c \geq 2(\sqrt{ac} + \sqrt{bc} - \sqrt{ab})$.

(23) $abc = 1,\ \ a^3 > 36$ 이면 $\dfrac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

(24) $(1 + x + y)^2 \geq 3(x + y + xy)$.

(25) $ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a + b + c)}$.

(26) $\dfrac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

(27) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이면 $xy + yz + zx \geq -\dfrac{1}{2}$.

(28) $4x(x + y)(x + z)(x + y + z) + y^2z^2 \geq 0$.

Exercise 3.17.2. $p,\ q,\ r,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $pz - 2qy + rx = 0,\ \ pr - q^2 > 0$ 이면 $xz - y^2 < 0$ 임을 증명하여라.

Exercise 3.17.3. $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ d > 0$ 이고 $c^2 + a^2d < 4bd$ 일 때, 4차 다항식 $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 는 실수해를 갖지 않음을 보여라.

Exercise 3.17.4. 임의의 양수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $p \in \mathbb{R}^{0+}$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2} \geq a^pbc + ab^pc + abc^p$$

Exercise 3.17.5. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 다음 두 수 $A,\ B$ 중 어느 것이 더 큰지 결정하여라.

$$A = 3 + (a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right),$$
$$B = \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$$

Exercise 3.17.6. 모든 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 다음 부등식을 만족하는 실수 p 의 최댓값을 구하여라.

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq p(xy+yz+zx)^2$$

Exercise 3.17.7. $p \in \left\{1,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5}\right\}$ 와 모든 실수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 에 대하여

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + \ \cdots\ + {x_n}^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \ \cdots\ + x_{n-1}x_n)$$

을 만족하는 2 이상의 자연수 n 의 값을 구하여라.

3.18 $A + B$ 의 최솟값 구하기

$x^2 + y^2 \geq 2xy$ 에서 $x = \sqrt{A},\ y = \sqrt{B}$ 을 대입하면

$$A + B \geq 2\sqrt{AB} \quad (\text{단}, A,\ B \in \mathbb{R}^{0+}) \tag{3.6}$$

을 얻을 수 있다. (이 때, 등호는 $A = B$ 일 때 성립한다.)
이 부등식은 $A + B$ 의 최솟값을 구하는데 매우 유용하다. 다음의 예제들을 통해 연구해 보자.

Example 3.18.1. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, $ab + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{(ab)\left(\frac{c}{b}\right)} = 2\sqrt{ac}$.

Example 3.18.2. $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 일 때,

$$2a + 5b > ab(12 - 2a - 5b)$$

이 성립함을 보여라.

Proof. $2a + 5b > ab(12 - 2a - 5b)$ 을 정리하면 $(2a + 5b)(1 + ab) > 12ab$ 이다. 여기서 $2a + 5b \geq 2\sqrt{10ab},\ \ 1 + ab \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로 두 식을 곱하면 $(2a + 5b)(1 + ab) \geq 4\sqrt{10}ab$ 인데, $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$ 이므로 $4\sqrt{10}ab > 12ab$ 이다. 그러므로 $(2a + 5b)(1 + ab) \geq 4\sqrt{10}ab > 12ab$. □

Example 3.18.3. $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}^{0+}$ 일 때,

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

이 성립함을 보여라.

Proof. $a + b \geq 2\sqrt{ab},\ cd \geq 2\sqrt{cd}$ 이므로 $a + b + c + d \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \geq 2\sqrt{4\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = 4\sqrt[4]{abcd}$. □

Example 3.18.4. $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}^{0+}$ 에 대하여 $a_1c_1 \geq {b_1}^2,\ \ a_2c_2 \geq {b_2}^2$ 일 때,

$$(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \geq (b_1 + b_2)^2$$

이 성립함을 보여라.

Proof. $(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \geq (b_1 + b_2)^2 \iff (a_1c_1 - {b_1}^2) + (a_2c_2 - {b_2}^2) + (a_1c_2 + a_2c_1 - 2b_1b_2) \geq 0$ 이므로 증명해야할 부등식은 $a_1c_2 + a_2c_1 - 2b_1b_2 \geq 0$ 이다.

$$a_1c_2 + a_2c_1 \geq 2\sqrt{a_1c_2a_2c_1} = 2\sqrt{a_1c_1} \cdot \sqrt{a_2c_2} \geq 2b_1b_2.$$

□

Example 3.18.5. $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 $ab \leq 1$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

Proof.

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \geq 4.$$

□

Example 3.18.6. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Proof. $a + b \geq 2\sqrt{ab},\ \ b + c \geq 2\sqrt{bc},\ \ c + a \geq 2\sqrt{ca}$ 이므로 세 부등식을 모두 곱하면

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

□

Example 3.18.7. 실수 $x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n$ 이 $x_1x_2\ \cdots\ x_k \geq 1\ \ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)} + \ \cdots\ + \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)} < 2.$$

Proof. $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 에 대하여 $x_k > 0$ 이므로 $1 + x_k \geq 2\sqrt{x_k}$ 을 적용하면

$$\frac{k}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)} \leq \frac{k}{2^k\sqrt{x_1x_2\cdots x_k}} \leq \frac{k}{2^k}$$

따라서

$$LHS \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ \cdots\ + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} < 2.$$

□

3.19 Exercises

Exercise 3.19.1. (1) ~ (8) 번까지 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식들이 성립함을 보여라. (1) $a^2b+\dfrac{1}{b} \geq 2a$.
(2) $6a+b(c+2)(2c+3) > 6(c+2)\sqrt{ab}$.
(3) $a^4+a^3b-4a^2b+ab+b^2 \geq 0$.
(4) $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc$.
(5) $\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)} \geq 6\sqrt[4]{abcd}$.
(6) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{cd} \geq \dfrac{8}{(a+b)(c+d)}$.
(7) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$.
(8) $2(a+b)^2+(a+b) \geq 4(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})$.

Exercise 3.19.2. $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\binom{n}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{a_ia_j} \geq 4\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{a_i+a_j}\right)^2.$$

3.20 $A \cdot B$ 의 최댓값 구하기

$x^2 + y^2 \geq 2xy$ 에서 $x = \sqrt{A},\ y = \sqrt{B}$ 을 대입하면

$$AB \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \quad (\text{단}, A,\ B \in \mathbb{R}^{0+}) \tag{3.7}$$

을 얻을 수 있다. (이 때, 등호는 $A = B$ 일 때 성립한다.)
이 부등식은 AB 의 최댓값을 구하는데 매우 유용하다. 다음의 예제들을 통해 연구해 보자.

Example 3.20.1. $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 $a + b = 1$ 일 때, $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$ 임이 성립함을 증명하여라.

Proof.

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a+b+1}{ab} = 1 + \frac{2}{ab} \geq 1 + \frac{2}{\frac{1}{4}} \geq 9.$$

□

Example 3.20.2. $0 < b < a$ 일 때, $a + \frac{1}{ab-b^2} \geq 3$ 이 성립함을 보여라.

Proof. 식 (1.8) 로부터 $(a-b)b \leq \left(\frac{(a-b)+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ 이므로 $a + \frac{1}{ab-b^2} \geq a + \frac{4}{a^2}$ 이 성립한다.
따라서 $a + \frac{4}{a^2} \geq 3$ 임을 보이는 것으로 충분하다. $a + \frac{4}{a^2} \geq 3 \iff (a+1)(a-2)^2 \geq 0$ 이므로 문제의 부등식은 성립한다. 그리고, 등호는 $a - b = b$ 이고, $a - 2 = 0$ 즉, $a = 2,\ b = 1$ 일 때 성립한다. □

Example 3.20.3. $a > 4$ 일 때, $4\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)(1+2\sqrt{a}) \leq (a+1)^2$ 이 성립함을 보여라.

Proof.

$$\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)(1+2\sqrt{a}) \leq \left(\frac{(a-2\sqrt{a})+(1+2\sqrt{a})}{2}\right)^2 = \frac{(a+1)^2}{4}$$

등호는 $a - 2\sqrt{a} = 1 + 2\sqrt{a}$ 일 때 즉, $a = 9 + 4\sqrt{5}$ 일 때, 성립한다. □

Example 3.20.4. $a,\ b,\ c,\ c \in \mathbb{R}^+$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Proof.

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a}\right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b}\right) \\ &= \frac{a^2+c^2+ad+bc}{(b+c)(d+a)} + \frac{b^2+d^2+ab+cd}{(c+d)(a+b)} \geq \frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd)}{(a+b+c+d)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2} \geq 2. \end{aligned}$$

□

3.21 Exercises

Exercise 3.21.1. 임의의 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $(1+a+b)^2 \geq (1+2a)(1+2b)$.

(2) $a < \sqrt{b} < a+1$ 일 때, $\sqrt{b} \leq a + \dfrac{b-a^2}{2a+1} + \dfrac{1}{4(2a+1)}$.

(3) $ab = 1$ 일 때, $22\sqrt{a^3+b^3} + 1 \leq a(a+1) + b(b+1)$.

(4) $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \leq \dfrac{a+b+c}{2}$.

(5) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.

Exercise 3.21.2. $n \geq 2$ 에 대하여 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \in \mathbb{R}^+$ 이고 $x_{n+1} = x_1$ 일 때, 다음 부등식을 만족하는 $p_n \in \mathbb{R}^+$ 의 최댓값을 구하여라.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1}\right) \geq p_n \cdot \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 {x_{k+1}}^2.$$

Exercise 3.21.3. $n \geq 4$ 에 대하여 음이 아닌 실수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 의 합이 1 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ \cdots\ + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq \frac{1}{4}.$$

3.22 $A + A^{-1}$ 의 최솟값 구하기

$x^2 + y^2 \geq 2xy$ 에서 $x = \sqrt{A},\ \ B = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ 을 대입하면

$$A + \frac{1}{A} \geq 2 \quad (A \in \mathbb{R}^+) \tag{3.8}$$

을 얻을 수 있다. (이 때, 등호는 $A = 1$ 일 때 성립한다.)
이 부등식도 많은 문제를 푸는데 매우 유용하게 사용되는데, 대부분의 문제들이 식 (1.9) 와 같은 형태로 주어지지 않으므로 우리는 적절한 식의 변형을 통하여 식 (1.9) 와 같은 형태로 만들어야 한다. 다음의 예제들을 보자.

Example 3.22.1. 임의의 $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc.$$

Proof. 문제의 부등식을 abc 로 나누면 다음과 같이 쉽게 증명된다.

$$\underbrace{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)}_{\geq 2} \geq 6.$$

□

Example 3.22.2. 임의의 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 81abcd.$$

Proof. 문제의 부등식을 $abcd$ 로 나누면 다음과 같이 쉽게 증명된다.

$$\underbrace{\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right)}_{\geq 3}\underbrace{\left(b + 1 + \frac{1}{b}\right)}_{\geq 3}\underbrace{\left(c + 1 + \frac{1}{c}\right)}_{\geq 3}\underbrace{\left(d + 1 + \frac{1}{b}\right)}_{\geq 3} \geq 81.$$

□

Example 3.22.3. $a \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여, $\sqrt{a}(a+1) + a(a-4) + 1 \geq 0$ 임을 보여라.

Proof. 문제의 부등식을 a 로 나누면

$$\underbrace{\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{a + \frac{1}{a}}_{\geq 2} \geq 4.$$

□

Example 3.22.4. 임의의 $a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Proof. $p = b+c,\ q = c+a,\ r = a+b$ 라 두면 $a = \dfrac{-p+q+r}{2},\ b = \dfrac{p-q+r}{2},\ c = \dfrac{p+q-r}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{q}{r}+\frac{r}{q}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{r}{p}+\frac{p}{r}\right)}_{\geq 2} - 3\right\} \\
&\geq \frac{1}{2}(6-3) \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

□

3.23 Exercises

Exercise 3.23.1. $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 다음이 부등식을 증명하여라.

(1) $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2.$

(2) $\dfrac{2a^2+1}{\sqrt{4a^2+1}} > 1.$

(3) $(ab+cd)\left(\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bd}\right) \geq 4.$

(4) $4ab(3-a)-4a(1+b^2) \leq b.$

(5) $a^2+b+\sqrt{a}+\sqrt{ab}(a\sqrt{b}-4\sqrt{b}) \geq 0.$

제 4 장

코시 부등식과 판별식

다음과 같은 2차식을 생각하자.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

이 식을 완전제곱식으로 고치면

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}, \quad (D = b^2 - 4ac)$$

이다. 여기서 D 을 2차식 $f(x)$ 의 판별식(discriminant)이라 하고, 이것으로 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근의 개수를 판별할 수가 있다.

4.1 이차식의 값

Theorem 4.1.1. $F(x) = ax^2 + bx + c,\ (a > 0)$[1] 에 대하여 $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ 라 할 때,

(1) 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) \geq f(x_0)$ 이므로 $y = f(x)$ 의 최솟값은 $f(x_0) = -\dfrac{D}{4a^2}$ 이다.

(2) 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $f(x) > 0$ 인 것과 $D < 0$ 인 것은 서로 동치이다.

(3) $D = 0$ 이면 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $f(x) \geq 0$ 이고, $x = x_0$ 일 때만, $f(x) = 0$ 이다.

(4) $D > 0$ 이면 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 $x_1,\ x_2\ \ (x_1 > x_2)$ 을 가진다. 이 때, 부등식 $f(x) > 0$ 의 해집합은 $\{x \mid x < x_2,\ x > x_1\}$ 이고, 부등식 $f(x) < 0$ 의 해집합은 $\{x \mid x_2 < x < x_1\}$ 이다.

---

1) $a < 0$ 경우에는 여러분들의 몫으로 남겨두지만, 반드시 확인해보길 바란다.

Example 4.1.1. 양수 $a,\ b,\ c$ 가 삼각형의 세 변의 길이가 될 조건과 다음의 부등식은 필요충분조건[2)]임을 보여라.

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$$

Proof. 문제의 부등식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4) &\iff a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0\\ &\iff (a^2-(b-c)^2)(a^2-(b+c)^2)<0\\ &\iff (b-c)^2<a^2<(b+c)^2\\ &\iff \mid b-c\mid < a < b+c.\end{aligned}$$

□

Example 4.1.2. $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 이 주어진 실수라 할 때, $S=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ \cdots\ +(x-x_n)^2$ 이 최소가 되는 $x\ (\in\mathbb{R})$ 의 값을 구하여라.

Solution. 문제의 식을 정리하면

$$S = nx^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)x+{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2$$

이므로

$$x=-\frac{-2(x_1+x_2+\cdots+x_n}{2n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

에서 최소를 가진다.[3)]

Example 4.1.3. $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ 이라 하자. $(x-y)^2,\ (y-z)^2,\ (z-x)^2$ 중 가장 작은 값은 $(x^2+y^2+z^2)/2$ 보다 크거나 같음을 보여라.

Example 4.1.4.

Exercise 4.1.1.

Exercise 4.1.2.

Exercise 4.1.3.

2) 필요충분조건 (Necessary and Sufficient Condition ; N.S.C.) 을 다른 말로 동치라고 한다.
3) $x=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ 은 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 의 (산술)평균임을 기억하자.

Exercise 4.1.4.

Exercise 4.1.5.

Exercise 4.1.6.